МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ - ШКОЛЕ

ФГОС

Алгебра

9 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/297 от 12.10.12) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-249 от 11.10.12)

Условные обозначения:

— задания, предназначенные для устной работы

— задания повышенной трудности

— начало необязательного материала внутри пункта

— конец необязательного материала внутри пункта

Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — М. : Просвещение, 2014. — 335 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-032436-6.

Данный учебник является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-032436-6

Дорогие девятиклассники!

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Алгебра, наряду с арифметикой и геометрией, принадлежит к числу старейших математических наук. В 9 классе вы обратитесь к вопросам, которые давно интересовали учёных, — это методы решения уравнений и неравенств, доказательство неравенств, формул для арифметической и геометрической прогрессий, тригонометрических формул, формул комбинаторики. Не случайно в учебнике помещены задачи, связанные с именами выдающихся математиков: Пифагора, Евклида, П. Ферма, И. Ньютона и др.

В 9 классе вы научитесь решать неравенства — линейные и второй степени, изучите метод интервалов для решения рациональных неравенств. Все умения, связанные с неравенствами, вам потребуются при изучении алгебры не только в 9 классе, но и в старших классах.

В этом году расширится круг изученных функций, что обогатит ваши представления о функциях и их свойствах и позволит ввести понятие корня степени n. Вы познакомитесь с функциями натурального аргумента — последовательностями, с арифметической и геометрической прогрессиями, формулами для вычисления суммы первых n членов этих прогрессий, решите ряд старинных задач, связанных с прогрессиями.

Ещё в курсе геометрии вы познакомились с синусом и косинусом, тангенсом и котангенсом угла. Изучение тригонометрических формул в 9 классе не является обязательным для обычных классов, но для классов с углублённым изучением математики этот материал по традиции обязательный. Владение им поможет успешнее освоить программу старших классов.

Большое значение имеет материал заключительной главы учебника «Элементы приближённых вычислений, статистики, комбинаторики и теории вероятностей». Здесь рассмотрены правила приближения результатов вычислений, определения точности приближённых результатов, способы представления данных, используемые в описательной статистике. Вопросы комбинаторики интересовали учёных давно — первоначально в связи с азартными играми, потом оказалось, что найденные ими факты и формулы дали начало ещё одной математической науке — теории вероятностей.

Алгебра нужна в повседневной жизни, так как учит общим правилам действий над объектами, учит решать уравнения и неравенства, доказывать тождества, неравенства, применять функции для решения задач.

Весь материал учебника разбит на 5 глав, а каждая глава — на параграфы и пункты, содержащие теоретические сведения и практические упражнения. Новые термины и важные факты выделены в тексте **жирным шрифтом**. Правила и свойства, которые полезно запомнить, даны на цветном фоне или в рамочке.

Каждая глава имеет дополнения, позволяющие расширить знания, полученные при изучении главы, и научиться решать более сложные задачи. Эти материалы охватывают традиционную программу классов с углублённым изучением математики. В исторических сведениях приведена информация, дополняющая изученное в главе, рассказывающая о развитии математики и об учёных-математиках.

В конце учебника имеется раздел «Задания для повторения», в котором собраны упражнения на вычисления, упрощение буквенных выражений, решение уравнений, а также текстовые задачи. Здесь имеется много исторических задач и заданий из старинных учебников и сборников задач. К некоторым заданиям в учебнике приведены ответы.

Если вы хотите учиться успешно, то с вниманием относитесь к тому, что написано в учебнике и объясняет учитель, к выполнению домашних заданий.

Перед выполнением домашнего задания обязательно прочитайте заданный на дом пункт учебника, вспомните объяснение учителя. Это позволит подготовиться к выполнению заданий. Ответьте на вопросы, идущие после учебного текста, а в случае затруднения найдите ответы на них в тексте учебника. Объяснение того или иного термина ищите в предметном указателе. Там они выписаны в алфавитном порядке.

Особое внимание уделите решению текстовых задач. Эти задачи часто выносятся на итоговый контроль: ГИА-9 и ЕГЭ-11. Кроме того, работа с текстовыми задачами необходима для развития мышления и способности к учению.

Лучшему усвоению изученного поможет использование дидактических материалов, содержащих задания для самостоятельных и контрольных работ, а также материалы для подготовки к самостоятельным работам.

Желаем вам успехов в изучении алгебры!

Авторы

ГЛАВА 1
НЕРАВЕНСТВА

При изучении материала главы 1 вам предстоит научиться решать неравенства — линейные и второй степени, изучить метод интервалов для решения рациональных неравенств, который будет часто использоваться не только в 9 классе, но и в старших классах.

§ 1. Линейные неравенства с одним неизвестным

1.1. Неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенство вида

$$kx + b > 0 \tag{1}$$

или

$$kx + b < 0, \tag{2}$$

где k и b — данные числа, причём $k \neq 0$, называют **неравенством первой степени с одним неизвестным x**.

Число k называют **коэффициентом** при неизвестном, а число b — **свободным членом** неравенств (1) и (2).

Решением неравенства с одним неизвестным x называют такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Здесь и далее рассматриваются неравенства с неизвестным x, хотя вместо x можно писать любую букву: t, v, y, ...

Пример 1. Решим неравенство

$$2x + 5 < 0. \tag{3}$$

Чтобы его решить, можно рассуждать так.

Пусть некоторое число x_0 есть решение неравенства (3). Подставим его вместо x в неравенство (3). Получим верное числовое неравенство

$$2x_0 + 5 < 0. \tag{4}$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства число -5, получим верное числовое неравенство

$$2x_0 < -5. \tag{5}$$

Деля это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство

$$x_0 < -\frac{5}{2}. \tag{6}$$

Итак, любое решение неравенства (3) является решением неравенства $x < -\frac{5}{2}$. Покажем, что любое решение неравенства $x < -\frac{5}{2}$ является решением неравенства (3). Пусть некоторое число x_0 есть решение неравенства $x < -\frac{5}{2}$. Тогда верно числовое неравенство (6). Умножив это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство (5). Прибавляя далее к обеим частям неравенства (5) число 5, получим верное числовое неравенство (4), т. е. получим, что x_0 является решением неравенства (3).

Итак, множество всех решений неравенства (3) есть множество всех решений неравенства $x < -\frac{5}{2}$, т. е. множество всех решений неравенства (3) составляет интервал $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого неравенства первой степени. Из этих рассуждений вытекает следующий способ решения неравенства первой степени с одним неизвестным:

> перенести свободный член этого неравенства в правую часть (изменив знак числа b на противоположный);
> разделить обе части полученного неравенства на коэффициент при неизвестном (при этом если $k > 0$, то знак неравенства не изменяется; если $k < 0$, то знак неравенства изменяется на противоположный); полученное неравенство и определяет множество всех решений исходного неравенства.

Пример 2. Решим неравенство

$$-4x + 13 < 0. \tag{7}$$

Перенеся свободный член в правую часть, получим неравенство

$$-4x < -13.$$

Разделив обе части этого неравенства на отрицательное число –4, получим неравенство

$$x > \frac{13}{4}$$

(обратите внимание на изменение знака неравенства). Таким образом, множество всех решений неравенства (7) составляет интервал $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

1. Изобразите на координатной оси интервал:
а) $(-2; 7)$; б) $(-17; 34)$; в) $(1234; 1398)$;
г) $(-\infty; 0)$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; -3)$;
ж) $(2; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$; и) $\left(\frac{1}{3}; 0,5\right)$.

2. Изображённое на рисунке 1 множество чисел задайте в виде неравенства.

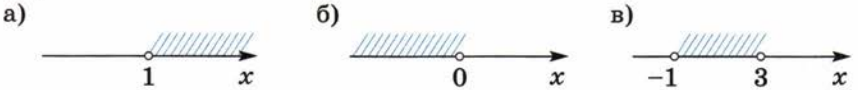


Рис. 1

3. Изобразите на координатной оси множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству (двойному неравенству):
а) $x > 0$; б) $x < 3$; в) $x > 3579$;
г) $x < -2$; д) $x > -1748$; е) $x < 0,06$;
ж) $x > \sqrt{5}$; з) $x < \pi$; и) $0 < x < \sqrt{2}$;
к) $-2 < x < -0,5$; л) $|x| < 1$; м) $|x| > 1$.

4. Какой знак (=, ≠, <, >) следует поставить между числами a и b, если их разность $a - b$:
а) положительное число; б) отрицательное число;
в) натуральное число; г) не равна нулю;
д) равна нулю?

5. Какое число больше:
а) a или $a + 3$; б) $b + 1$ или $b + 2$;
в) $a - 5$ или $a + 2$; г) $b - 7$ или $b - 6$?
Здесь a и b — любые данные числа.

6. Сравните с нулём разность $x - a$, если: а) $x > a$; б) $x < a$.

7. Запишите какое-нибудь неравенство первой степени с одним неизвестным. Назовите коэффициент при неизвестном и свободный член этого неравенства.

8. а) Что называют решением неравенства с одним неизвестным?
б) Что значит решить неравенство с одним неизвестным?

9. Можно ли указать:
а) наименьшее решение неравенства $x > 0$;
б) наибольшее решение неравенства $x < -2$;
в) наименьшее целое решение неравенства $x > -5$;
г) наибольшее целое решение неравенства $x < 1$?

10. Является ли число 3 решением неравенства:
а) $x > 0$; б) $x > -2$; в) $x < \pi$;
г) $x < 3$; д) $x < \sqrt{10}$; е) $\sqrt{8{,}7} < x$?

Решите неравенство (**11—25**):

11. а) $x - 1 > 0$; б) $x + 5 < 0$; в) $x - 0{,}5 < 0$;
г) $3 + x > 0$; д) $7 + x > 0$; е) $x - 1\frac{1}{3} < 0$.

12. а) $x + 4 > 7$; б) $x - 11 < -7$; в) $x + 7 > 7$;
г) $x - 6 < 6$; д) $4 + x > 2$; е) $3 + x < -6$.

13. а) $x - 2 > 0{,}2$; б) $x - 3{,}5 < 4$; в) $2{,}1 + x < 7$;
г) $x - 2 > -0{,}6$; д) $x + 10{,}7 > 7{,}9$; е) $5{,}013 + x < 0{,}13$.

14. а) $x - 3 < -\frac{1}{3}$; б) $x + \frac{1}{5} < 199$; в) $\frac{5}{7} + x > 2\frac{1}{2}$;
г) $x - 2\frac{1}{2} < -1\frac{3}{5}$; д) $x + \frac{37}{90} < \frac{11}{18}$; е) $\frac{13}{48} + x > 7\frac{15}{16}$.

15. а) $x - 3{,}6 > 2\frac{1}{3}$; б) $7{,}4 + x > 7\frac{2}{5}$; в) $x - 12\frac{1}{4} < 15{,}3$.

16. а) $2x > 4$; б) $7x < -14$; в) $-5x < 100$;
г) $-3x < 9$; д) $-2x > -2$; е) $-3x > -6$.

17. а) $3x < 2$; б) $-2x < 11$; в) $-4x > -2$;
г) $-5x > 1$; д) $-17x > -2$; е) $13x < 3$.

18. а) $2x > 0$; б) $-2x < 0$; в) $-x < 2$;
г) $-x < 0$; д) $-x > -2$; е) $-x > 1$.

19. а) $\frac{1}{2}x < 3$; б) $\frac{3}{4}x < 1$; в) $-\frac{1}{3}x > -1$;
г) $\frac{1}{5}x > 0$; д) $2x > \frac{2}{3}$; е) $-4x < \frac{8}{11}$.

20. а) $\frac{2}{3}x < \frac{5}{6}$; б) $-\frac{4}{7}x > \frac{8}{7}$; в) $-2x < 1\frac{1}{3}$;
г) $2\frac{1}{5}x > 3$; д) $1\frac{1}{2}x > -2\frac{1}{2}$; е) $-3\frac{2}{7}x < -3\frac{1}{7}$.

21. а) $0{,}2x > 3$; б) $3x > 1{,}8$; в) $-0{,}001x < 1$.

22. а) $0{,}2x > \frac{2}{5}$; б) $1{,}5x < \frac{9}{10}$; в) $-1{,}1x < 4\frac{2}{5}$;
г) $\frac{x}{2} > 3$; д) $\frac{x}{4} > \frac{7}{12}$; е) $-\frac{2x}{3} < -8$.

23. а) $2x - 4 > 0$; б) $3x - 1 < 0$; в) $-2x - 4 > 0$;
г) $7x + 4 < 0$; д) $4x + 3 > 0$; е) $-4x + 3 < 0$.

24. а) $1 + \frac{2}{9}x < 0$; б) $\frac{4}{5} - 3x < 0$; в) $1\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x > 0$;
г) $4\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3}x > 0$; д) $2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2} < 0$; е) $\frac{5}{7}x - \frac{5}{7} > 0$.

25. а) $0{,}3x - 20 < 0$; б) $4x + 0{,}1 > 0$;
в) $1{,}35 - 27x > 0$; г) $0{,}15 - 150x < 0$;
д) $-0{,}3x - 13 > 0$; е) $-0{,}17x - 51 < 0$.

1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным

Покажем, как можно, используя график линейной функции, решать неравенства вида

$$kx + b > 0 \tag{1}$$

или

$$kx + b < 0, \tag{2}$$

где k и b — данные числа и $k \neq 0$.

В декартовой системе координат xOy рассмотрим прямую

$$y = kx + b. \tag{3}$$

На рисунке 2, *а* изображена такая прямая при $k > 0$, а на рисунке 2, *б* — при $k < 0$.

Решить неравенство (1) — это значит найти все значения x, для каждого из которых соответствующая точка прямой $y = kx + b$ расположена выше оси Ox.

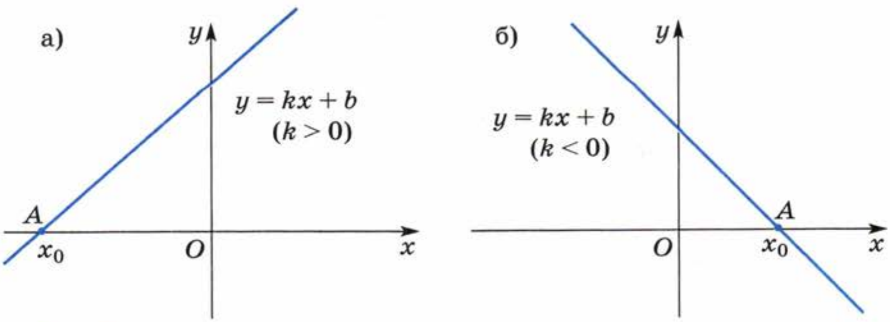


Рис. 2

Пусть точка A — точка пересечения прямой (3) с осью Ox. Абсциссу точки A обозначим через x_0. Так как её ордината равна нулю, то x_0 удовлетворяет уравнению $0 = kx_0 + b$, откуда

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Обратимся к рисунку 2, *а*, соответствующему случаю $k > 0$. Мы видим, что точки прямой $y = kx + b$ расположены выше оси Ox для всех x, находящихся правее точки x_0, т. е. для всех x из интервала $(x_0; +\infty)$.

Итак, при $k > 0$ множество решений неравенства (1) составляет интервал $(x_0; +\infty)$, а множество решений неравенства (2) составляет интервал $(-\infty; x_0)$.

При $k < 0$ (рис. 2, *б*), наоборот, множество решений неравенства (1) составляет интервал $(-\infty; x_0)$, а множество решений неравенства (2) составляет интервал $(x_0; +\infty)$.

Пример 1. Используя график линейной функции, решим неравенства

$$2x + 1 > 0 \qquad (4)$$

и

$$2x + 1 < 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим в декартовой системе координат xOy прямую

$$y = 2x + 1, \qquad (6)$$

которую можно построить по двум точкам. В качестве первой точки возьмём точку пересечения нашей прямой с осью Ox. Полагая в формуле (6) $y = 0$, получим уравнение $0 = 2x + 1$. Его решение $x_0 = -\frac{1}{2}$ есть абсцисса точки A — точки пересечения прямой с осью Ox. Итак, $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

В качестве второй точки можно взять точку B пересечения нашей прямой с осью Oy. Её абсцисса $x = 0$, а ордината $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Итак, $B(0; 1)$.

Через точки A и B проводим прямую. Это и есть прямая $y = 2x + 1$ (рис. 3). Из рисунка 3 видно, что множество решений

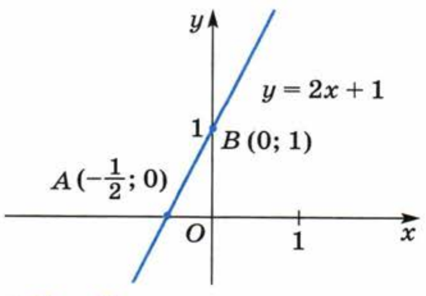


Рис. 3

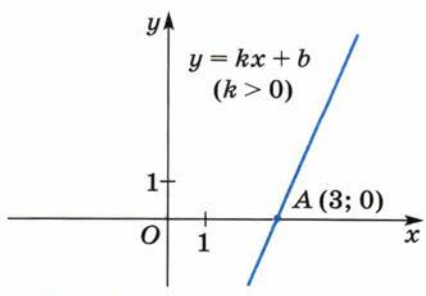


Рис. 4

неравенства (4) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, а множество решений неравенства (5) — интервал $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$kx + b > 0, \tag{7}$$

если известно, что прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $A(3; 0)$ и её угловой коэффициент положителен.

Учитывая, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ положителен и прямая пересекает ось Ox в точке $A(3; 0)$, можно показать (схематически), как расположена прямая в координатной плоскости (рис. 4). Из этого рисунка видно, что множество всех решений неравенства (7) составляет интервал $(3; +\infty)$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

26. Постройте график линейной функции:

а) $y = x - 4$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -3x - 3$;

г) $y = 5x - 6$; д) $y = -0{,}5x + 1{,}5$; е) $y = 1\frac{1}{2}x - 0{,}3$.

С помощью графика определите интервал, на котором функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

27. Запишите интервал, на котором линейная функция, график которой изображён на рисунке 5, принимает положительные значения; отрицательные значения.

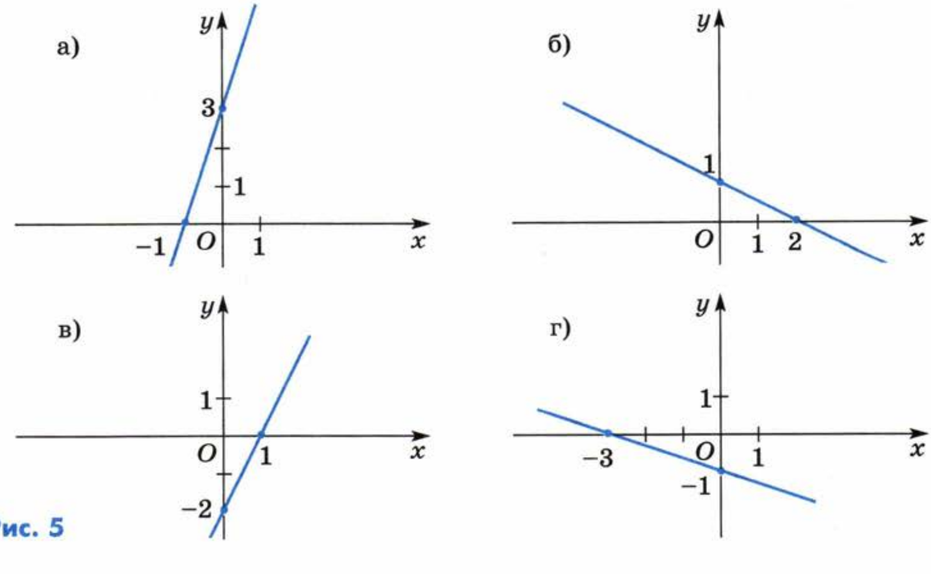


Рис. 5

28. Как можно решить неравенство первой степени с одним неизвестным, используя график линейной функции?

29. Решите неравенство, используя график линейной функции:

а) $x + 2 > 0$; б) $-x + 2 > 0$; в) $2x - 1 < 0$;

г) $-2x - 1 < 0$; д) $0{,}2x + 1 > 0$; е) $-\frac{1}{3}x + 5 < 0$;

ж) $400x + 100 > 0$; з) $200x - 500 > 0$; и) $0{,}01x - 0{,}05 < 0$.

1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным

Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа, называют **линейным неравенством с одним неизвестным x.**

Следующие неравенства могут служить примерами линейных неравенств с одним неизвестным x:

$$2x + 7 < x - 5, \quad 0x - 3 < 0, \; 7 < 2x + 9,$$
$$2x + 7 > 2x + 5, \quad 3x + 2 + x > x - 1 + x, \; 3x + 2 < 0.$$

Ясно, что любое неравенство первой степени есть частный случай линейного неравенства.

Члены многочленов в левой и правой частях линейного неравенства называют **членами этого неравенства.**

Два неравенства с одним неизвестным x называют **равносильными**, если любое решение первого неравенства является решением второго и, наоборот, любое решение второго является решением первого. Любые неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными.

При решении неравенств пользуются утверждениями 1—4.

1. Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.

Иначе говоря, если какой-нибудь член неравенства перенести с противоположным знаком из одной части неравенства в другую, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$2x - 7 < 0 \;\text{ и }\; 2x < 7,$$
$$3x + 5 > 2x - 9 \;\text{ и }\; 3x - 2x + 5 > -9.$$

2. В неравенстве можно приводить подобные члены.

Иначе говоря, если в левой или правой части неравенства привести подобные члены, то получится неравенство, равносильное исходному.

Например, равносильны неравенства

$$3x - 4\frac{1}{2} + 5x - \frac{1}{2} > 0 \text{ и } 8x - 5 > 0,$$

$$2x + 3 - 1 < x - 2x + 2 \text{ и } 2x + 2 < -x + 2.$$

3. При умножении (или делении) неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на положительное число и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$\frac{1}{4}x > 2 \text{ и } x > 8,$$

$$3x + 5 < 0 \text{ и } x + \frac{5}{3} < 0.$$

4. При умножении (или делении) неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$7x - 3 > 0 \text{ и } -7x + 3 < 0,$$

$$5x + 4 < -3x + 2 \text{ и } -5x - 4 > 3x - 2.$$

Приведём примеры решения линейных неравенств с использованием утверждений 1—4.

Пример 1. Решим неравенство

$$4x - 7 < -2x + 5. \qquad (1)$$

Перенеся все члены неравенства (1) в левую часть, получим неравенство

$$4x - 7 + 2x - 5 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Приведя подобные члены в левой части полученного неравенства, получим неравенство первой степени с одним неизвестным

$$6x - 12 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Все его решения составляют интервал $(-\infty; 2)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (1) составляет интервал $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$7x + 5 < 7x - 1. \qquad (2)$$

Перенеся все члены неравенства (2) в левую часть, получим неравенство

$$7x + 5 - 7x + 1 < 0, \qquad (3)$$

равносильное неравенству (2). Приведя подобные члены в левой части неравенства (3), получим неравенство

$$0 \cdot x + 6 < 0, \qquad (4)$$

равносильное неравенству (3), а значит, и неравенству (2).

Очевидно, что нет ни одного числового значения x, которое удовлетворяло бы неравенству (4). Следовательно, неравенство (4), а значит, и равносильное ему неравенство (2) не имеют решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решим неравенство

$$9x - 5 > 9x - 6. \qquad (5)$$

Перенеся все члены неравенства (5) в левую часть, получим неравенство

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5). Приведя подобные члены в левой части неравенства (6), получим неравенство

$$0 \cdot x + 1 > 0,$$

равносильное неравенству (6), а значит, и неравенству (5).

Получилось неравенство, справедливое для любых значений x. Это означает, что решением неравенства (5) является любое действительное число, т. е. множество всех решений неравенства (5) составляет интервал $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

30. а) Какое неравенство называют линейным неравенством с одним неизвестным?
б) Что называют членами линейного неравенства?
в) Какие неравенства называют равносильными?
г) Сформулируйте утверждения о равносильности неравенств.

31. Приведите неравенство к виду $kx + b > 0$ или $kx + b < 0$:
а) $3x - 2 > 7x + 5$; б) $4 - 6x < 9 - x$;
в) $7 > 0{,}2x$; г) $8 - 2(3 - 2x) < 1$.

32. Является ли число, указанное в скобках, решением неравенства:
а) $4x - 4 > 3x + 3$ (-1); б) $2 + 12x < -x + 3$ (-2);
в) $5x - 7 > 9 + x$ (100); г) $72x - 18 < -13x$ (-10)?

33. Являются ли равносильными неравенства:
а) $2x - 1 > 6$ и $6 > 2x - 1$; б) $x < 3$ и $x + 2 < 5$;
в) $2x > 4$ и $x < 2$; г) $2x > 5$ и $x - 7 > -2 - x$;
д) $2 < 7 - x$ и $3x < 5 + 2x$; е) $3x - 7 > 5$ и $-3x + 7 < -5$?

Решите неравенство (**34—41**):

34. а) $x + 4 > 5x$; б) $x - 2 < 3x$;
в) $2x + 1 < x$; г) $7x - 13 > 9x$.

35. а) $2x - x - 1 < 2$; б) $3 < 7x - 5 - 4x$;
в) $5x - 2x - 8x + x - 12x > 7 - 2x$;
г) $8 - 9x > x - 3 - 3x + 4x + 15$.

36. а) $x - 2 < x$; б) $x + 5 > x$;
в) $6 - 3x > 1 - 3x$; г) $12 + 4x < 3 - x + 5x$.

37. а) $x + 2 < x$; б) $x - 5 > x$;
в) $4 - 8x < -8x + 4$; г) $x - 3 + 2x < 4 + 3x - 1$.

38. а) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x + 5 > \frac{1}{3}x - 1$; б) $\frac{1}{2}x - 3 < 2 - \frac{1}{3}x$;
в) $1 - \frac{3}{7}x - 5 < 6 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{21}x$; г) $2x - \frac{3}{5}x > 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$;
д) $\frac{2}{5}x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{13}{20}$; е) $3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x < 14 + \frac{1}{12}x$.

39. а) $1,2 - 2,6x - 5 > 3,2x - 3$;
б) $x - 1,2 < 0,3x + 3,7$;
в) $7 - 0,2x < 21,28 - 1,6x$;
г) $0,8x + 0,12 - 0,3x > 76,2 - 0,1x + 0,6x$;
д) $1,52 - 2,8x < 1,72 - 5,2x$;
е) $0,014 - 12,5x > 1,25 - 0,5x + 1,086 - 12x$.

40. а) $2x + (3x - 1) > 4$; б) $x - 16 < (5 - 2x) - x - 1$;
в) $2x - (x - 1) < 3$; г) $(2x - 3) - (x + 1) > 1$;
д) $(x + 1) - (2x + 3) - (1 - 7x) < x - (8 - 5x)$;
е) $(3x - 11) - (5 - 9x) + (x - 1) > 1 - 4x - (12 + x)$.

41. а) $2(x - 1) < 4$; б) $3(2x - 1) > 12$;
в) $4(1 + x) < 8 - 4x$; г) $25 - 10x > -5(2x - 7)$.

42. **Доказываем.** Докажите, что данное неравенство равносильно линейному неравенству, и найдите все его решения:
а) $x(2 - x) < (3 - x)(3 + x)$; б) $3(x - 1)(x + 1) > 3(1 + x^2)$;
в) $(x - 2)(x - 3) + (4 - x)(x + 2) > 0$;
г) $(2x - 1)(x + 2) - (x - 5)(2x + 1) > 0$.

43. Решите неравенство:
а) $\frac{x - 1}{3} < 1$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$;
в) $\frac{2x}{3} < \frac{x}{4} - 1$; г) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{3} > 8$;
д) $\frac{x - 4}{5} > 2 - \frac{x}{3}$; е) $\frac{2x + 1}{4} + 2 < \frac{3x + 2}{3}$;
ж) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x}{6} + \frac{x - 2}{3}$; з) $\frac{7x - 2}{4} > 1 - \frac{x - 1}{3} + 2\frac{1}{12}x$.

44. Может ли неравенство первой степени с одним неизвестным:
а) быть верным при любом значении неизвестного;
б) не иметь решений?

45. Может ли линейное неравенство с одним неизвестным:
а) быть верным при любом значении неизвестного;
б) не иметь решений?

46. Найдите область определения функции:
а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; в) $y = \frac{5x}{\sqrt{1-x}}$.

1.4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным

Если требуется найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно нескольких данных линейных неравенств с одним неизвестным x, то говорят, что надо решить **систему линейных неравенств с одним неизвестным x.** Значение x, являющееся решением каждого неравенства системы, называют **решением системы неравенств.**

Для того чтобы решить систему линейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений — она и будет множеством всех решений данной системы.

Обычно неравенства системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой.
Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ -4x + 5 < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решив первое неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Решив второе неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Теперь найдём те значения x, для которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (1), т. е. найдём общую часть интервалов

$\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ и $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Для этого отметим на координатной оси Ox оба интервала. Из рисунка 6 видно, что общая часть этих интервалов есть интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) составляет интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Рис. 6

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 23 < 0, \\ 12x - 13 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив каждое неравенство системы (2), найдём, что множеством всех решений первого неравенства являются все x, меньшие $\frac{23}{5}$ $\left(x < \frac{23}{5}\right)$, а множеством всех решений второго — все x, большие $\frac{13}{12}$ $\left(x > \frac{13}{12}\right)$.

Рис. 7

Множеством всех решений системы (2) будет множество всех тех x, для каждого из которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (2). Следовательно, это будут те x, которые больше чем $\frac{13}{12}$, но меньше чем $\frac{23}{5}$, т. е. все x из интервала $\frac{13}{12} < x < \frac{23}{5}$ (рис. 7).

Итак, множество всех решений системы (2) составляет интервал $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Рис. 8

Решениями первого неравенства системы (3) являются все $x > 5$, а решениями второго — все $x < \frac{3}{2}$.

Решениями системы (3) могут быть только те x, которые больше чем 5, но меньше чем $\frac{3}{2}$. Ясно, что таких x не существует (рис. 8). Следовательно, система (3) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Систему неравенств иногда можно записать в виде двойного неравенства. Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7 \end{cases} \tag{4}$$

можно записать в виде двойного неравенства

$$0 < 2x - 5 < 7. \tag{5}$$

Поэтому двойное неравенство можно решать двумя способами.

I способ. Запишем двойное неравенство (5) в виде системы неравенств (4) и решим эту систему:

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 5, \\ 2x < 7 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2{,}5, \\ x < 6, \end{cases}$$

т. е. $2{,}5 < x < 6$.

II способ. Решаем двойное неравенство (5) следующим образом. Прибавим к каждой его части число 5:

$$5 < 2x < 12. \tag{6}$$

Каждую часть двойного неравенства (6) умножим на положительное число 0,5:

$$2{,}5 < x < 6.$$

Следовательно, решения двойного неравенства (5) составляют интервал (2,5; 6).

Заметим, что на самом деле второй способ решения двойного неравенства есть краткая запись первого способа.

47. Что значит решить систему линейных неравенств с одним неизвестным?

48. Найдите хотя бы одно общее решение неравенств:
а) $x > 3$ и $x > 2$;
б) $x < -2$ и $x < -1$;
в) $x + 1 > 0$ и $x - 1 > 0$;
г) $x - 2 < 0$ и $x + 2 < 0$;
д) $2x > -4$ и $x + 1 < 0$;
е) $3x < 9$ и $x + 3 > 0$.

Отметьте на координатной оси все решения системы неравенств, если они существуют (**49—51**):

49. а) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x > 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -5. \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} x < 7, \\ x < 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ x < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < -5, \\ x < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -10, \\ x < -16. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -5, \\ x > -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -5. \end{cases}$

52. Запишите какую-либо систему неравенств, все решения которой образуют интервал, отмеченный на рисунке 9 двойной штриховкой.

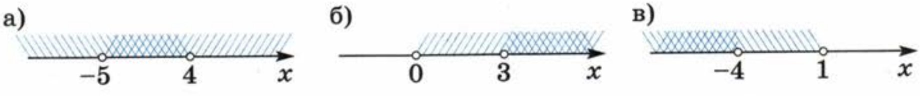


Рис. 9

53. Для неравенства $2x < 1$ подберите другое неравенство так, чтобы система этих неравенств:
а) не имела решений;
б) имела множеством всех решений интервал $(-\infty; 0,5)$.

Решите систему неравенств **(54—55)**:

54. а) $\begin{cases} 3 > x, \\ x < 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x > 1, \\ -7 < x + 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x > 6, \\ 1 > 3 - 2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6 - 2x > 5, \\ 3 - 2x > 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 2x - 8 > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x + 3 < 8, \\ 7 - 3x > 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 1, \\ 5x - 1 > 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x < x - 6, \\ 2 > 5 + 3x. \end{cases}$

55. а) $\begin{cases} 2x + 7 > 3 - x, \\ \dfrac{1}{3}x - 1 > 2x - \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x > 8, \\ \dfrac{3}{4}x - 1 > \dfrac{3}{5}x - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} < 1, \\ 4 - x > \dfrac{x - 5}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{3} > \dfrac{3 - x}{2}, \\ \dfrac{x}{7} - 1 < \dfrac{2 - 8x}{4}. \end{cases}$

56. а) Найдите все x, для каждого из которых значение функции $y = 2x - 3$ больше значения функции $y = -x + 4$.
б) Найдите все x, для каждого из которых значение функции $y = 1 - x$ больше значения функции $y = 0,5x + 5$.

57. а) Найдите все x, для каждого из которых функции $y = 3x$ и $y = 1 + x$ одновременно принимают отрицательные значения.
б) Найдите все x, для каждого из которых функции $y = 0,4x + 1$ и $y = -2x + 3$ одновременно принимают положительные значения.

в) Найдите все значения x, для каждого из которых значение функции $y = 0{,}25x - 0{,}5$ меньше значений функций $y = x$ и $y = -2x + 3$.

г) Найдите все значения x, для каждого из которых значение функции $y = x + 4$ больше значений функций $y = -x$ и $y = 2x + 3$.

58. Определите интервал оси Ox, на котором:

а) значение функции $y = 5x - 8$ больше нуля, а значение функции $y = -5x + 8$ меньше нуля;

б) значения функции $y = 5x - 8$ больше соответствующих значений функции $y = -5x + 8$.

59. На рисунке 10 изображены графики линейных функций, обозначенных y_1 и y_2. Определите все значения x, при каждом из которых: а) $y_1 > y_2$; б) $y_1 < y_2$.

60. Решите систему неравенств, используя графики линейных функций:

а) $\begin{cases} 3x < 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x < 0, \\ 3 - x < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x + 2 > 0, \\ x + 1 < 0. \end{cases}$

61. Решите двойное неравенство двумя способами:

а) $0 < 3x < 2$; б) $-1 < \frac{2}{7}x < 8$; в) $1 < x + 4 < 2$;

г) $-7 < x - 6 < -2$; д) $0 < 3x - 7 < 3$; е) $-8 < 0{,}5x + 1 < -4$.

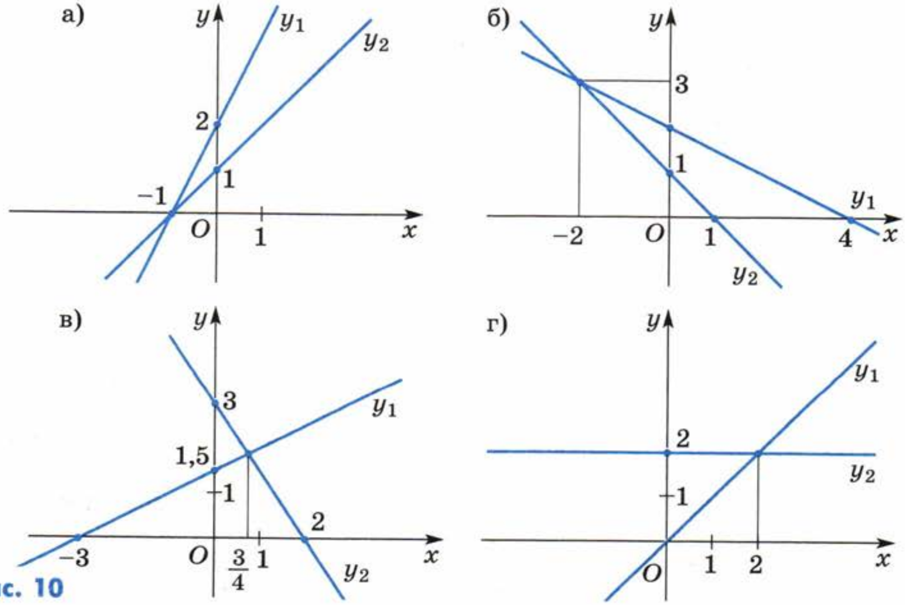


Рис. 10

62. **Исследуем.** При каких значениях a:

а) число 1 является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3ax + 2 > 6x - a, \\ 2ax - 3 < 4x + 5a; \end{cases}$$

б) число 1 не является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x > 5 - a, \\ x < 3a - 4; \end{cases}$$

в) число 3 является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x - 4a > 2, \\ 2x - 3a < 15, \end{cases}$$

а число 6 не является решением этой системы?

1.5*. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля

В этом пункте рассматриваются неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля, и такие, что их решение приводит к решению линейных неравенств или систем линейных неравенств.

Пример 1. Решим неравенство

$$|x| < 3. \qquad (1)$$

I способ. Используя определение модуля числа, получим, что неравенство (1) верно:

1) для $x = 0$;

2) для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3; \end{cases} \qquad (2)$$

3) для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x < 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Все решения системы неравенств (2) составляют промежуток (0; 3), а все решения системы неравенств (3) — промежуток (–3; 0).

Объединив все x, для которых верно неравенство (1), получим, что все решения неравенства (1) составляют промежуток (–3; 3). Иными словами, все решения неравенства (1) есть все x, удовлетворяю-

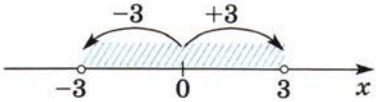


Рис. 11

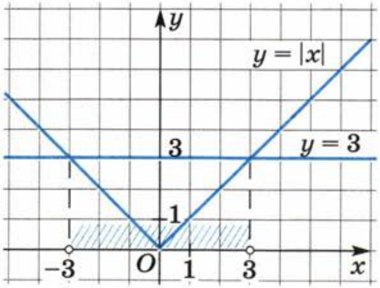


Рис. 12

щие двойному неравенству $-3 < x < 3$, или, что то же самое, системе неравенств

$$\begin{cases} x > -3, \\ x < 3. \end{cases}$$

II способ. Используя то, что на координатной оси $|x|$ есть расстояние от точки x до точки 0, получим, что все точки, находящиеся на расстоянии, меньшем чем 3 от точки 0, есть только точки, находящиеся между точками -3 и 3 (рис. 11), т. е. точки интервала $(-3; 3)$.

III способ. Применим графики функций к решению неравенства (1). Построим графики функций $y = |x|$ и $y = 3$ (рис. 12). Решениями неравенства (1) являются только те числа x (точки x оси Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |x|$ расположены ниже прямой $y = 3$. Следовательно, все решения неравенства (1) составляют интервал $(-3; 3)$.

Ответ: $(-3; 3)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$|x| > 5. \qquad (4)$$

I способ. Используя определение модуля числа, получим, что неравенство (4):

1) не верно для $x = 0$;
2) верно для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > 5; \end{cases} \qquad (5)$$

3) верно для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x > 5. \end{cases} \qquad (6)$$

Все решения системы неравенств (5) составляют промежуток $(5; +\infty)$, а все решения системы неравенств (6) — промежуток $(-\infty; -5)$.

Объединив все эти решения, получим, что все решения неравенства (4) составляют объединение двух промежутков: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$. Иными словами, все решения неравенства (4) есть как все x, удовлетворяющие неравенству $x > 5$, так и все x, удовлетворяющие неравенству $x < -5$.

II способ. Используя то, что на координатной оси $|x|$ есть расстояние от точки x до точки 0, получим, что все точки, находящиеся на расстоянии, большем чем 5, от точки 0, есть как точки, находящиеся левее точки −5, так и точки, находящиеся правее точки 5 (рис. 13), т. е. точки, принадлежащие множеству $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

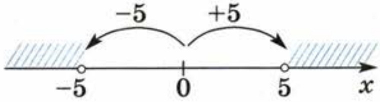


Рис. 13

III способ. Применим графики функций к решению неравенства (4). Построим графики функций $y = |x|$ и $y = 5$ (рис. 14). Решениями неравенства (4) являются только те числа x (точки x оси Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |x|$ расположены выше прямой $y = 5$. Следовательно, все решения неравенства (1) составляют множество $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

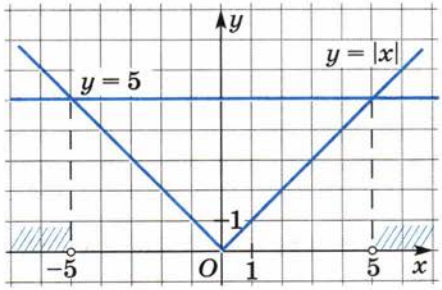


Рис. 14

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Рассуждая, как в примерах 1 и 2 (I способ решения), можно прийти к следующему утверждению:

а) Все решения неравенства $|f(x)| < a$, где a — положительное число, есть все x, удовлетворяющие двойному неравенству $-a < f(x) < a$, или, что то же самое, системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$$

б) Все решения неравенства $|f(x)| > a$, где a — положительное число, есть все x, удовлетворяющие неравенству $f(x) > a$, и все x, удовлетворяющие неравенству $f(x) < -a$.

Пример 3. Решим неравенство

$$|x - 3| < 4. \qquad (7)$$

Все решения неравенства (7) есть все x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x - 3 < 4, \\ x - 3 > -4. \end{cases} \qquad (8)$$

Множество решений системы неравенств (8) есть интервал $(-1; 7)$. Следовательно, множество решений неравенства (7) есть тот же интервал.

Ответ: $(-1; 7)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$|2x - 5| > 3. \qquad (9)$$

Все решения неравенства (9) есть все x, удовлетворяющие неравенству

$$2x - 5 > 3, \qquad (10)$$

и все x, удовлетворяющие неравенству

$$2x - 5 < -3. \qquad (11)$$

Множество решений неравенства (10) составляет интервал $(4; +\infty)$, а множество решений неравенства (11) составляет интервал $(-\infty; 1)$. Следовательно, множество решений неравенства (9) состоит из объединения этих интервалов.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Пример 5. Решим неравенство

$$\big|2|x| - 5\big| < 4. \qquad (12)$$

Множество решений неравенства (12) есть все x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2|x| - 5 < 4, \\ 2|x| - 5 > -4. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} |x| < 4{,}5, \\ |x| > 0{,}5. \end{cases} \qquad (13)$$

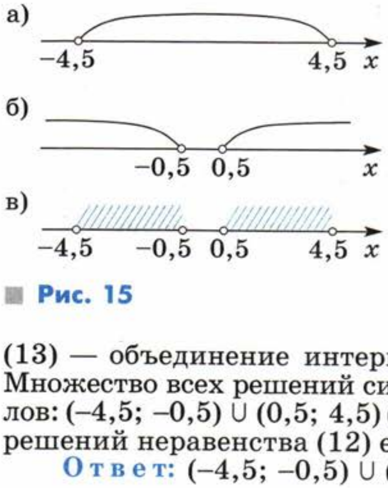


Рис. 15

Множество всех решений первого неравенства системы (13) — интервал $(-4{,}5; 4{,}5)$ (рис. 15, *а*), а множество всех решений второго неравенства системы (13) — объединение интервалов $(-\infty; -0{,}5)$ и $(0{,}5; +\infty)$ (рис. 15, *б*). Множество всех решений системы (13) есть объединение двух интервалов: $(-4{,}5; -0{,}5) \cup (0{,}5; 4{,}5)$ (рис. 15, *в*). Следовательно, множество всех решений неравенства (12) есть объединение тех же двух интервалов.

Ответ: $(-4{,}5; -0{,}5) \cup (0{,}5; 4{,}5)$.

Пример 6. Решим неравенство

$$|x + 2| < 0{,}5x + 4. \qquad (14)$$

I способ. Используя определение модуля числа, получим, что неравенство (14) верно:

1) для $x = -2$;
2) для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x > -2, \\ x + 2 < 0{,}5x + 4; \end{cases} \qquad (15)$$

3) для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x < -2, \\ -(x+2) < 0{,}5x + 4. \end{cases} \qquad (16)$$

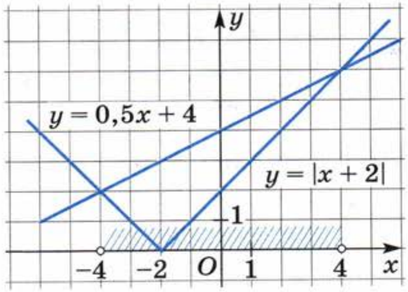


Рис. 16

Все решения системы неравенств (15) составляют промежуток $(-2; 4)$, а все решения системы неравенств (16) — промежуток $(-4; -2)$. Объединив все x, для которых справедливо неравенство (14), получим, что все решения неравенства (14) составляют интервал $(-4; 4)$.

II способ. Применим графики функций к решению неравенства (14). Построим графики функций $y = |x + 2|$ и $y = 0{,}5x + 4$ (рис. 16). Решениями неравенства (14) являются только те числа x (точки x оси Ox), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |x + 2|$ расположены ниже прямой $y = 0{,}5x + 4$. Следовательно, все решения неравенства (14) составляют интервал $(-4; 4)$.

Ответ: $(-4; 4)$.

Решите неравенство (**63—68**):

63. а) $|x| > 1$; б) $|x| > 3$; в) $|x| > -10$;
г) $|x| < 1$; д) $|x| < 3$; е) $|x| < -10$.

64. а) $|x - 2| > 1$; б) $|x - 1| > 2$; в) $|x - 3| > -1$;
г) $|x - 2| < 1$; д) $|x - 1| < 2$; е) $|x - 3| < -1$.

65. а) $|x + 2| > 3$; б) $|x + 1| > 4$; в) $|x + 5| > -5$;
г) $|x + 2| < 3$; д) $|x + 1| < 4$; е) $|x + 5| < -5$.

66. а) $|2x - 3| > 1$; б) $|2x + 1| > 3$; в) $|3x - 5| > 1$;
г) $|2x - 3| < 1$; д) $|2x + 1| < 3$; е) $|3x - 5| < 1$.

67. а) $|2|x| - 3| > 5$; б) $|2|x| - 5| > 3$;
в) $|2|x| - 3| < 5$; г) $|2|x| - 5| < 3$.

68. а) $|x - 3| > x + 1$; б) $|x + 3| > 2x + 4$;
в) $|x - 3| < x + 1$; г) $|x + 3| < 2x + 4$.

69. **Исследуем.** При каких значениях a неравенство:
а) $|2x - a| < x + 1$ не имеет решений;
б) $|3x - a| > 3 - 3x$ имеет множество решений $(1; +\infty)$?

§ 2. Неравенства второй степени с одним неизвестным

2.1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным

Неравенство вида

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0} \tag{1}$$

или

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c < 0,} \tag{2}$$

где a, b и c — данные числа, причём $a \neq 0$, называют **неравенством второй степени с одним неизвестным x**.

Число a называют **коэффициентом при x^2**, число b — **коэффициентом при x**. Выражения ax^2, bx и c называют **членами неравенств** (1) и (2), число c — **свободным членом.**

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называют также **дискриминантом** каждого из неравенств (1) и (2).

Примерами неравенств второй степени с одним неизвестным x могут служить неравенства

$$3x^2 - 4x + 5 > 0, \quad -x^2 - 1 > 0, \quad -6x^2 - 2x + 1 < 0, \quad -2x^2 < 0.$$

Напомним, что решением неравенства с одним неизвестным x называют такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство; **решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что их нет. При решении неравенств второй степени будут использоваться утверждения о равносильности неравенств, приведённые в предыдущем параграфе, где эти утверждения иллюстрировались на примере линейных неравенств. На самом деле они верны и для многих других неравенств, в частности для неравенств второй степени.

Заметим, что если a — отрицательное число, то, умножив неравенство (1) на -1, получим на основании утверждения 4 п. 1.3 равносильное ему неравенство

$$(-a)\,x^2 + (-b)\,x + (-c) < 0$$

уже с положительным коэффициентом при x^2.

Аналогично если a — отрицательное число, то, умножив неравенство (2) на -1, получим на основании утверждения 4 п. 1.3 равносильное ему неравенство

$$(-a)\,x^2 + (-b)\,x + (-c) > 0$$

также с положительным коэффициентом при x^2.

Учитывая это, дальше будем рассматривать решения неравенств (1) и (2), считая, что a — положительное число. В следующих пунктах будет приведено решение этих неравенств отдельно при условиях $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

70. а) Какой вид имеет неравенство второй степени с одним неизвестным x?

б) Что называют дискриминантом неравенства второй степени $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$?

в) Что называют решением неравенства с одним неизвестным x?

г) Что значит решить неравенство с одним неизвестным?

д) Что значит, что два неравенства равносильны?

е) Сформулируйте утверждения о равносильности неравенств.

71. Является ли неравенство:

а) $3 - 2x > 0$; б) $7x - 3 < 1 + 7x$; в) $x^2 - 5x + 1 < 0$;

г) $7x - \frac{x}{3} > 0$; д) $4x - 5x^2 > 0$; е) $3x^2 + 7 < 0$

неравенством первой степени? линейным неравенством? неравенством второй степени?

72. Приведите неравенство:

а) $4x + 2x^2 - 1 > 0$; б) $6 + x^2 < 0$;

в) $\frac{x^2}{3} - x + 0,2 < 0$; г) $1 - 7x + \frac{x^2}{2} > 0$

к виду $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где a, b, c — целые числа. Назовите коэффициент при x^2 и свободный член.

73. Вычислите дискриминант неравенства:

а) $x^2 - 7x + 10 > 0$; б) $x^2 + 9x + 20 < 0$;

в) $x^2 - x - 7 < 0$; г) $x^2 + x - 5 > 0$.

Является ли число, указанное в скобках, решением неравенства (74—75):

74. а) $x^2 - 3x + 4 > 0$ $\left(\frac{1}{3}\right)$; б) $x^2 - 2x + 3 < 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$;

в) $2x^2 - 5x - 1 < 0$ (-2); г) $3x^2 - 3x + 1 > 0$ (-3);

д) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{7} < 0$ (15); е) $\frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{7} < 0$ (12)?

75. а) $x^2 - 11,7x + 17 < 0$ $(\sqrt{3})$; б) $x^2 - 11,4x + 14 > 0$ $(\sqrt{2})$;

в) $x^2 + x - 12 > 0$ (π); г) $x^2 - 2x - 15 < 0$ $(-\pi)$?

76. Напишите неравенство с положительным коэффициентом при x^2, равносильное неравенству:

а) $-x^2 + 5x + 7 > 0$; б) $-2x^2 - 4x + 8 < 0$;

в) $-\frac{1}{3}x^2 + 9 > 0$; г) $-\frac{3}{5}x^2 - 5 < 0$.

77. Напишите неравенство с коэффициентом 1 при x^2, равносильное неравенству:

а) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$; б) $\frac{1}{3}x^2 - 8x + 3 < 0$;

в) $\frac{1}{5}x^2 - 5x + 7 > 0$; г) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 < 0$.

78. Разделив правую и левую части неравенства на общий делитель свободного члена и коэффициентов при x^2 и при x, напишите неравенство, равносильное данному:

а) $4x^2 - 6x + 10 > 0$; б) $-6x^2 - 12x - 6 < 0$;

в) $-9x^2 - 90x - 81 > 0$; г) $10x^2 - 20x + 30 > 0$;

д) $12x^2 - 16x + 8 < 0$; е) $-11x^2 - 44x - 33 < 0$.

2.2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом

Пусть надо решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b и c — данные числа, причём $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$.

Как мы знаем, в этом случае

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2}$$

где x_1 и x_2 — корни трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0. \tag{3}$$

Так как a — положительное число, то неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \tag{4}$$

равносильно неравенству (3).

Заметим, что точки $x = x_1$ и $x = x_2$ не удовлетворяют неравенству (4). Так как $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$. Для определённости будем считать, что $x_1 < x_2$. Отметим на координатной оси Ox точки x_1 и x_2 (рис. 17).

Рис. 17

Эти точки делят ось Ox на три интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$.

Пусть x принадлежит интервалу $(x_2; +\infty)$, тогда

$$x - x_1 > 0 \text{ и } x - x_2 > 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Пусть далее x принадлежит интервалу $(x_1; x_2)$, тогда

$$x - x_1 > 0 \text{ и } x - x_2 < 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

Пусть x принадлежит интервалу $(-\infty; x_1)$, тогда

$$x - x_1 < 0 \text{ и } x - x_2 < 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Поэтому множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$. Его записывают так: $(-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$ — и читают: объединение интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$.

Отметим, что множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c < 0 \ (a > 0,\ D > 0) \qquad (5)$$

составляет интервал $(x_1; x_2)$.

Результат, к которому мы пришли, можно также получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c \ (a > 0). \qquad (6)$$

Учитывая, что $a > 0$, $D > 0$ и $x_1 < x_2$, изобразим схематически, как расположен график функции (6) в координатной плоскости (рис. 18).

Очевидно, что для тех x, для которых соответствующие точки параболы расположены выше оси Ox, выполняется неравенство (1), а для тех x, для которых они расположены ниже оси Ox, выполняется неравенство (5). Из рисунка 18 видно, что множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0$$

состоит из двух интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, а множество всех решений неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ составляет интервал $(x_1; x_2)$.

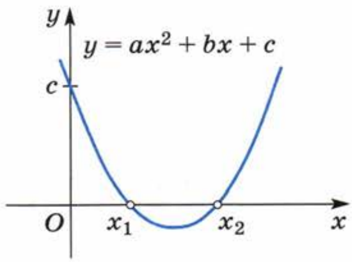


Рис. 18

> Таким образом, чтобы решить неравенство
>
> $$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0$$
>
> при $D > 0$, надо найти корни x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, определить знак трёхчлена на интервалах $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ и $(x_2; +\infty)$ и записать в ответ интервал (или объединение интервалов), на котором (которых) неравенство выполняется.

Пример 1. Решим неравенство

$$x^2 - 5x + 6 < 0. \qquad (7)$$

Дискриминант неравенства (7) $D = 1 > 0$, и поэтому трёхчлен $x^2 - 5x + 6$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, неравенство (7) можно переписать в виде

$$(x - 2)(x - 3) < 0. \qquad (8)$$

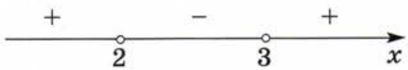


Рис. 19

Отметим на координатной оси Ox точки 2 и 3 (рис. 19). Легко видеть,

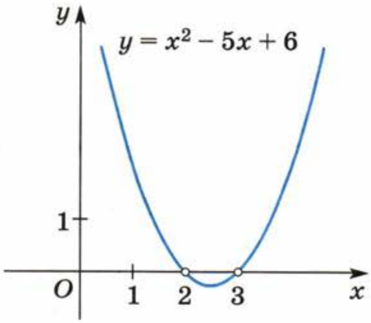


Рис. 20

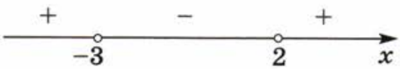


Рис. 21

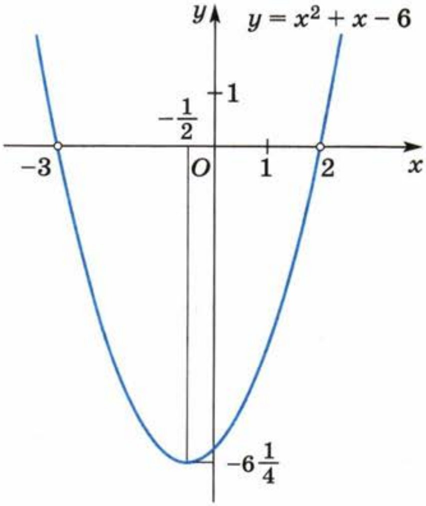


Рис. 22

что выражение $(x - 2)(x - 3)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 3, отрицательно для любого x, расположенного между точками 2 и 3, положительно для любого x, расположенного левее точки 2.

Поэтому множество всех решений неравенства (8) и, следовательно, равносильного ему неравенства (7) составляет интервал (2; 3). Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 - 5x + 6$ (рис. 20).

Ответ: (2; 3).

Пример 2. Решим неравенство

$$-x^2 - x + 6 < 0. \tag{9}$$

Умножив неравенство (9) на −1, получим равносильное ему неравенство

$$x^2 + x - 6 > 0, \tag{10}$$

в котором коэффициент при x^2 уже положителен.

Дискриминант этого неравенства $D = 25 > 0$. Корни квадратного трёхчлена $x^2 + x - 6$ есть $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Отметим на координатной оси Ox точки −3 и 2 (рис. 21). Рассуждая, как при решении примера 1, получим, что множество всех решений неравенства (10), а значит, и неравенства (9) составляет объединение интервалов $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$. К этому же выводу приходим с помощью рисунка 22, на котором изображена парабола $y = x^2 + x - 6$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

79. а) Как решается неравенство второй степени с положительным дискриминантом?
б) Как используется график квадратичной функции для решения неравенства второй степени?
в) Имеют ли решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, если $a > 0$ и их дискриминант больше нуля?

80. Приведите неравенство:
а) $-x^2 - 5x - 6 < 0$; б) $-x^2 - 7x + 8 > 0$;
в) $3x^2 - 15x - 18 > 0$; г) $-2x^2 - 8x + 10 > 0$
к виду $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ или $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

81. На рисунке 23 отмечены числа 1 и 3, обращающие произведение $(x - 1)(x - 3)$ в нуль. Определите, какие знаки имеет каждый множитель и их произведение на интервалах I, II, III.

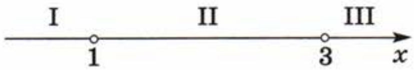


Рис. 23

82. Составьте неравенство второй степени с одним неизвестным, все решения которого отмечены на рисунке 24 штриховкой.

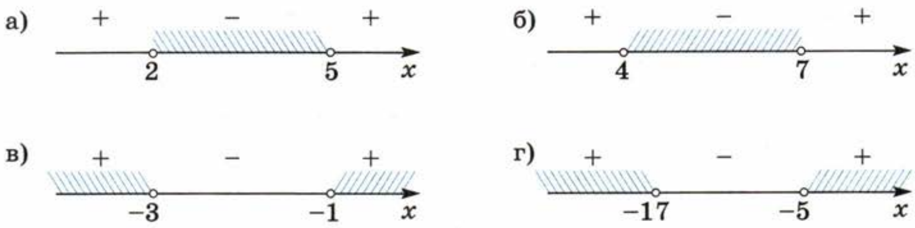


Рис. 24

83. Решите неравенство и отметьте на координатной оси множество всех его решений:
а) $(x - 9)(x - 2) > 0$; б) $(x - 8)(x - 19) < 0$;
в) $(x + 3)(x - 5) < 0$; г) $(x - 4)(x + 7) > 0$.

Решите неравенство (**84—89**):

84. а) $(2x - 1)(3x + 5) < 0$; б) $(1{,}2x - 0{,}5)(7x - 1) < 0$;
в) $(4x + 3)(5x + 2) > 0$; г) $\left(1\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}\right)(0{,}7x + 4) > 0$.

85. а) $x^2 - x > 0$; б) $x^2 + x < 0$; в) $5x^2 - x < 0$;
г) $3x^2 + x > 0$; д) $4x^2 + 7x > 0$; е) $3x - 2x^2 < 0$.

86. а) $x^2 - 4 > 0$; б) $x^2 - 9 < 0$; в) $x^2 - 100 < 0$; г) $1 - x^2 > 0$.

87. а) $x^2 - 3 > 0$; б) $x^2 - 5 < 0$; в) $2 - x^2 < 0$; г) $13 - x^2 > 0$.

88. а) $0{,}5x^2 - x < 0$; б) $1{,}3x^2 - 2x < 0$;
в) $3\frac{1}{2}x - x^2 > 0$; г) $\frac{7}{8}x^2 - 1\frac{3}{5}x > 0$.

89. а) $2x^2 - 3 < 0$; б) $7x^2 - 1 > 0$;
в) $5 - 0{,}2x^2 > 0$; г) $1{,}2 - 3x^2 < 0$.

90. Решите неравенство, используя график квадратичной функции:
а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; б) $x^2 + 4x + 3 < 0$;
в) $x^2 + 5x + 6 < 0$; г) $x^2 - 5x + 4 > 0$;
д) $3x^2 - 2x - 5 < 0$; е) $4x^2 - x - 3 < 0$;
ж) $7x^2 + 2x - 5 > 0$; з) $10x^2 + 3x - 1 > 0$.

91. Решите неравенство:
а) $0{,}25x^2 - 4x + 12 > 0$; б) $0{,}5x^2 + 8x + 24 < 0$;
в) $3 - x + \frac{1}{16}x^2 < 0$; г) $4x + \frac{1}{4}x^2 + 12 > 0$;
д) $5x^2 - x - 7 < 0$; е) $8x^2 - 3 - 2x > 0$;
ж) $2x^2 + 5 - 17x > 0$; з) $15x + 3 + 4x^2 < 0$.

92. При каких значениях x точки графика квадратичной функции:
а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = x^2 - 2x - 8$;
в) $y = -x^2 + 2x + 3$; г) $y = -x^2 + x + 12$
расположены выше оси Ox? ниже оси Ox?

93. Укажите все значения x, при каждом из которых квадратичная функция:
а) $y = x^2 + 1{,}5x - 1$; б) $y = x^2 - 3{,}5x + 2$;
в) $y = 4x^2 + 19x - 5$; г) $y = 3x^2 - 5x - 2$;
д) $y = -2x^2 + 5x + 3$; е) $y = -3x^2 - 8x + 9$
принимает положительные значения; отрицательные значения.

94. **Исследуем.** Найдите значение k, при котором неравенство:
а) $x^2 - 3x + k < 0$ верно только для $x \in (1; 2)$;
б) $-x^2 + x + k > 0$ верно только для $x \in (-2; 3)$.

2.3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равным нулю

Пусть надо решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b и c — данные числа, причём $a > 0$, $D = b^2 - 4ac = 0$.

Как мы знаем, в этом случае

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — корень квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x - x_0)^2 > 0.$$

При $x = x_0$ многочлен $(x - x_0)^2$ равен нулю. При любом же числовом значении $x \neq x_0$ многочлен $(x - x_0)^2$, а значит, и многочлен $a(x - x_0)^2$ принимают положительные значения. Следовательно, решением неравенства (1) будет любое число x, кроме $x = x_0$. Иначе говоря, множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$, где x_0 — корень квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Из сказанного следует также, что при тех же условиях на числа a, b и c неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{2}$$

не имеет решений.

Эти же выводы можно получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Изобразим (схематически) график функции (3) для $a > 0$, $D = 0$ (рис. 25). Из рисунка видно, что неравенство (1) справедливо для всех x, кроме $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$, а неравенство (2) не имеет решений.

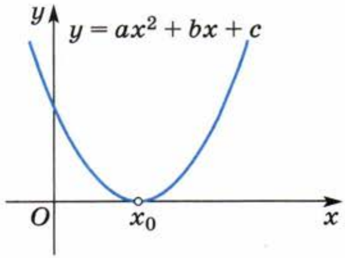


Рис. 25

Таким образом, чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0$$

при $D = 0$, надо найти корень x_0 квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, определить знак трёхчлена на интервалах $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$ и записать в ответ $(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, если неравенство выполняется на каждом из этих двух интервалов, или «нет решений», если неравенство не выполняется.

Пример. Решим неравенство:
а) $4x^2 + 4x + 1 > 0$; б) $4x^2 + 4x + 1 < 0$.
Находим дискриминант каждого из неравенств:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Так как дискриминант равен нулю, то квадратный трёхчлен $4x^2 + 4x + 1$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{1}{2}$ и $4x^2 + 4x + 1 > 0$

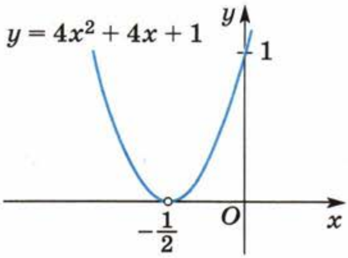


Рис. 26

при всех $x \neq -\frac{1}{2}$, откуда видно, что решением неравенства а) будет любое $x \neq -\frac{1}{2}$, т. е. множество всех решений неравенства а) состоит из двух интервалов $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Неравенство же б), очевидно, не имеет решений.

На рисунке 26 в плоскости xOy изображена парабола $y = 4x^2 + 4x + 1$. Вся она, кроме точки $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, расположена выше оси Ox. Из рисунка 26 видно, что множество всех решений неравенства а) состоит из всех x, кроме $x = -\frac{1}{2}$, а неравенство б) решений не имеет.

Ответ: а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) нет решений.

95. Имеет ли решения неравенство второй степени, если его дискриминант равен нулю? Какие случаи возможны?

96. С помощью графика квадратичной функции объясните, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D = 0$ не имеет решений?

97. Найдите все x, при каждом из которых выражение:

а) $2x^2$; б) $\frac{x^2}{2}$; в) $(x + 3)^2$; г) $(x - 1)^2$

принимает положительное значение.

98. Существуют ли x, при которых выражение:
а) $-x^2$; б) $-3x^2$; в) $(2 - x)^2$; г) $-(x + 4)^2$
принимает положительное значение?

99. Определите, является ли решением неравенства число, указанное в скобках:

а) $25x^2 - 10x + 1 < 0$ $\left(-1\frac{2}{7}\right)$; б) $4x^2 + 12x + 9 > 0$ $(-2{,}5)$;

в) $x^2 - x + 0{,}25 > 0$ $(\sqrt{3})$; г) $x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$ $(-1{,}7)$.

Решите неравенство (**100—101**):

100. а) $(x - 4)^2 > 0$; б) $(x + 1)^2 > 0$;
в) $(2x - 3)^2 > 0$; г) $(7 - 4x)^2 > 0$.

101. а) $x^2 - 4x + 4 > 0$; б) $x^2 - 2x + 1 > 0$;
в) $x^2 + 10x + 25 < 0$; г) $x^2 - 8x + 16 < 0$.

102. Решите неравенство, используя график квадратичной функции:
а) $x^2 - 2x + 1 > 0$; б) $x^2 + 6x + 9 < 0$;
в) $x^2 + 4x + 4 < 0$; г) $4x^2 - 4x + 1 > 0$.

103. Решите неравенство:
а) $4x^2 + 20x + 25 < 0$; б) $9x^2 - 36x + 36 > 0$;
в) $49x^2 + 14x + 1 > 0$; г) $25x^2 - 10x + 1 < 0$;
д) $2x^2 + 3x + 1\frac{1}{8} > 0$; е) $9x^2 - 10x + 2\frac{7}{9} < 0$.

104. **Исследуем.** Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство:
а) $x^2 - 24x + k > 0$ верно при всех x, кроме $x = 12$;
б) $64x^2 + kx + 9 > 0$ верно при всех x, кроме $x = -\frac{3}{8}$.

105. Найдите все x, при каждом из которых неверно неравенство:
а) $x^2 + 8x + 16 > 0$; б) $9x^2 - 6x + 1 < 0$.

2.4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом

Рассмотрим неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1}$$

где a, b и c — данные числа и $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$.

Выделяя полный квадрат из трёхчлена $ax^2 + bx + c$, получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что неравенство (1) можно переписать следующим образом:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} > 0,$$

откуда, учитывая, что $a > 0$ и $D < 0$, получаем, что неравенство (1) справедливо для любого x, т. е. на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Отсюда также следует, что при указанных выше условиях ($a > 0$, $D < 0$) неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ не имеет решений.

При $a > 0$ и $D < 0$ график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

изображён (схематически) на рисунке 27. Вся парабола расположена выше оси Ox, и поэтому неравенство (1) справедливо

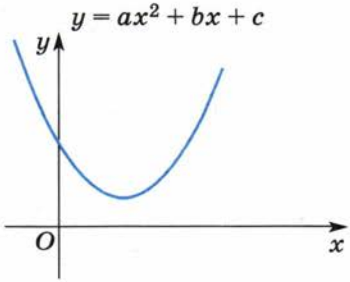


Рис. 27

для любого значения x, а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ не имеет решений.

Таким образом, чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0$$

при $D < 0$, надо определить знак трёхчлена на интервале $(-\infty; +\infty)$. Если неравенство выполняется на этом интервале, то в ответе записать: $(-\infty; +\infty)$; если не выполняется, то записать: нет решений.

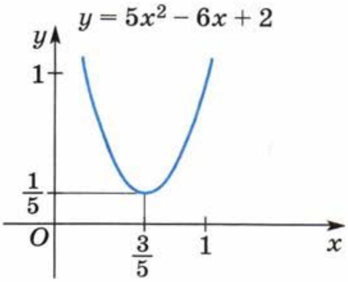


Рис. 28

Пример. Решим неравенство:

а) $5x^2 - 6x + 2 > 0$;
б) $5x^2 - 6x + 2 < 0$.

Дискриминант каждого из этих неравенств $D = -4 < 0$, значит, трёхчлен $5x^2 - 6x + 2$ не имеет корней. В каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$ трёхчлен положителен, поэтому неравенство а) выполняется для любых x, т. е. на интервале $(-\infty; +\infty)$, а неравенство б) не имеет решений.

На рисунке 28 изображена парабола $y = 5x^2 - 6x + 2$. Из рисунка видно, что неравенство а) справедливо для любого x, а неравенство б) не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.

106. Имеет ли неравенство второй степени решения, если его дискриминант меньше нуля? Какие случаи возможны?

107. С помощью графика квадратичной функции объясните, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D < 0$ не имеет решений.

108. Решите неравенство, используя график квадратичной функции:
а) $x^2 - x + 3 > 0$; б) $x^2 + 2x + 2 < 0$;
в) $x^2 - 3x + 4 < 0$; г) $x^2 + x + 5 < 0$.

Решите неравенство (**109—111**):

109. а) $3x^2 - 2x + 1 > 0$; б) $5x^2 - 4x + 2 < 0$;
в) $-4x^2 + x - 6 < 0$; г) $-7x^2 + 3x - 1 > 0$.

110. а) $0{,}2x^2 - x + 100 > 0$; б) $1{,}7x^2 + x + 10 < 0$;
в) $\frac{x^2}{5} - \frac{3x}{7} + 8 < 0$; г) $\frac{2x^2 - x}{3} - 12 > 0$.

111. а) $x^2 - 4{,}8x - 1 < 0$; б) $x^2 + 3{,}5x - 2 > 0$.

112. **Исследуем.** Найдите все значения m, при каждом из которых неравенство верно при любом значении x:
а) $2x^2 - x + m > 0$; б) $3x^2 + 2x + m > 0$.

2.5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Часто приходится решать неравенства, левые и правые части которых являются многочленами.

Для решения таких неравенств можно применять утверждения, приведённые в п. 1.3. На основании этих утверждений после переноса всех членов неравенства в левую его часть и приведения подобных членов получится неравенство, равносильное исходному. В правой части полученного неравенства будет стоять нуль, а в левой — многочлен. Дальше в этом пункте будут рассмотрены примеры решения неравенств, сводящихся к неравенствам второй степени.

Пример 1. Решим неравенство

$$x^3 + x^2 - 2x + 3 > 2x^2 - 3 - x + x^3. \qquad (1)$$

Перенеся все члены неравенства в левую его часть, получим неравенство

$$x^3 + x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 3 + x - x^3 > 0, \qquad (2)$$

равносильное неравенству (1).

Приведя в неравенстве (2) подобные члены, приходим к неравенству

$$-x^2 - x + 6 > 0, \qquad (3)$$

равносильному неравенству (2). Умножив его на -1, получим равносильное ему неравенство второй степени с положительным коэффициентом при x^2:

$$x^2 + x - 6 < 0. \qquad (4)$$

Дискриминант неравенства (4) $D = 25 > 0$. Квадратный трёхчлен $x^2 + x - 6$ имеет два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Поэтому неравенство (4) можно записать в виде

$$(x - (-3))(x - 2) < 0. \qquad (5)$$

Отметим на координатной оси Ox точки -3 и 2 (см. рис. 21). Легко видеть, что выражение $(x - (-3))(x - 2)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 2, отрицательно для любого x, расположенного между точками -3 и 2, положительно для любого x, расположенного левее точки -3.

Следовательно, множество всех решений неравенства (5), а значит, и равносильного ему неравенства (1) составляет интервал $(-3; 2)$.

Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 + x - 6$ (см. рис. 22).

Ответ: $(-3; 2)$.

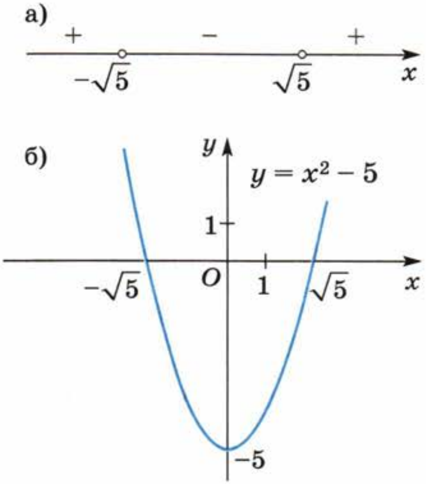


Рис. 29

Пример 2. Решим неравенство

$$x^2 > 5. \qquad (6)$$

Перенесём 5 в левую часть неравенства (6), получим неравенство второй степени

$$x^2 - 5 > 0, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6). Разложив на линейные множители многочлен $x^2 - 5$, придём к неравенству

$$(x - (-\sqrt{5}))(x - \sqrt{5}) > 0, \qquad (8)$$

равносильному неравенству (7).

Отметим на координатной оси Ox точки $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ (рис. 29, *а*). Рассуждая, как и выше, получим, что множество всех решений неравенства (8), а значит, и неравенства (6) есть объединение интервалов $(-\infty; -\sqrt{5})$ и $(\sqrt{5}; +\infty)$. Этот же результат можно получить, используя график линейной функции $y = x^2 - 5$, изображённый на рисунке 29, *б*.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}x^2. \qquad (9)$$

Перенесём все члены неравенства (9) в левую часть, получим неравенство

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > 0, \qquad (10)$$

равносильное неравенству (9). Так как производить вычисления с целыми коэффициентами удобнее, то умножим неравенство (10) на число −30. Получим неравенство

$$10x^2 - 6x - 15 < 0, \qquad (11)$$

равносильное неравенству (10).

Квадратный трёхчлен $10x^2 - 6x - 15$ имеет два корня:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{159}}{10} \text{ и } x_2 = \frac{3 + \sqrt{159}}{10},$$

поэтому неравенство (11) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0. \qquad (12)$$

Рассуждая, как выше (рис. 30), получим, что множество всех решений неравенства (12) составляет интервал $(x_1; x_2)$.

Рис. 30

Следовательно, множество всех решений неравенства (9) составляет интервал $\left(\frac{3-\sqrt{159}}{10}; \frac{3+\sqrt{159}}{10}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{159}}{10}; \frac{3+\sqrt{159}}{10}\right)$.

113. Как решают неравенства, левые и правые части которых многочлены?

114. Являются ли равносильными неравенства:
а) $3 - x + x^2 > 0$ и $x^2 > x - 3$;
б) $x^2 - 5 < 3x$ и $4x^2 - 12x < 20$;
в) $\frac{x^2 - 7x}{2} < 4$ и $3x^2 - 21x - 24 < 0$;
г) $x^2 + 5x - 7 > 0$ и $0{,}01x^2 - 0{,}07 > -\frac{1}{20}x$?

115. Приведите неравенство:
а) $7 > 3x - 5x^2$; б) $2x > -3 + 2x^2$;
в) $13x^2 - 5 < x$; г) $4x + 5 > x^2$
к виду $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$.

116. Приведите неравенство:
а) $10x - x^2 > 1$; б) $4x^2 - 6 > 9$;
в) $7 < 14x + 2x^2$; г) $5x^2 > 13x - 8$
к виду $ax^2 + bx + c < 0$.

117. Приведите неравенство:
а) $-x^2 > 7 - 3x$; б) $-x^2 < 5x - 6$; в) $-1{,}2x < 3 - 0{,}5x^2$
к виду $x^2 + px + q > 0$ или $x^2 + px + q < 0$.

Решите неравенство (**118—123**):

118. а) $0{,}5x^2 > x$; б) $1{,}3x^2 < 2x$; в) $3\frac{1}{2}x < x^2$;
г) $\frac{7}{8}x > 1\frac{3}{5}x^2$; д) $7 > 4x^2$; е) $5 < -x^2$;
ж) $2x^2 < 3$; з) $3x^2 > -5$.

119. а) $10x^2 > 3 + 5x$; б) $12x^2 > 8x + 3$;
в) $23x < 9x^2 + 8$; г) $7x^2 - 6 > 25x$.

120. а) $5(x-1)^2 > 5(1-x) - x$;
б) $2(x+1)^2 < 2(2x+1) - (x-1)(x+1)$;
в) $(x-1)^2 + (x-2)^2 < 1$;
г) $(x+3)(x-2) > 3x + 10 - (x+2)^2$.

121. а) $x^2 > 6x - 9$; б) $16x^2 < 8x - 1$;
в) $4 - 3x < 1 - 2x^2$; г) $6x > 12 - 5x^2$;
д) $x^2 - 7x + 5 > 3x^2 - 5x$; е) $4x^2 + 8x > 7x - 12$.

122. а) $\frac{x-1}{3} + 0{,}2x^2 < 1$; б) $x^2 - \frac{7-2x}{4} > 0{,}2$;
в) $\frac{(x-1)(x-2)}{15} < \frac{x+1}{5} - \frac{x}{3}$; г) $\frac{12-x^2}{4} - \frac{x}{3} < \frac{(x-3)^2}{12}$.

123. а) $|x^2 - 6x + 8| < 3$; б) $|x^2 + 2x - 4| > 4$;
в) $4 < |x^2 - 2x - 4| < 11$; г) $6 < |x^2 + 4x - 6| < 15$.

124. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2}}$; б) $y = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y = \frac{8x-7}{\sqrt{x^2+4}}$;

г) $y = \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^2-4}}$; д) $y = \frac{9x}{\sqrt{x^2+3}}$; е) $y = \frac{-12}{\sqrt{x^2-14x+4}}$;

ж) $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$; з) $y = \frac{-5x}{\sqrt{x^2-3}}$; и) $y = \frac{5+x^2}{\sqrt{5-x^2}}$.

§ 3. Рациональные неравенства

3.1. Метод интервалов

В этом пункте будет рассмотрено решение неравенств вида 1) $A(x) > 0$ и 2) $A(x) < 0$, где $A(x)$ — многочлен относительно x.

Для решения любого из этих неравенств надо найти корни многочлена $A(x)$ и отметить их на координатной оси, в каждом из получившихся интервалов определить знак многочлена $A(x)$. Тогда объединение всех интервалов, где многочлен положителен, составит множество решений неравенства 1), а объединение всех интервалов, где многочлен отрицателен, составит множество решений неравенства 2).

Пример 1. Решим неравенство

$$(x + 2)(x - 3)(x^4 + 1) < 0.$$

Так как многочлен $x^4 + 1$ не имеет корней, то он не разлагается на линейные множители.

Многочлен $A(x) = (x + 2)(x - 3)(x^4 + 1)$ имеет два нуля: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. На координатной оси отметим точки -2 и 3 (рис. 31).

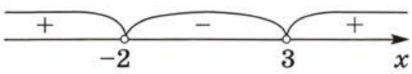


Рис. 31

Затем на каждом из интервалов $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; +\infty)$ определим знак многочлена $A(x)$. При этом учтём, что $x^4 + 1 > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Для любого x из интервала $(3; +\infty)$ имеем $x + 2 > 0$ и $x - 3 > 0$, поэтому $A(x) > 0$. Для любого x из интервала $(-2; 3)$ имеем $x + 2 > 0$ и $x - 3 < 0$, поэтому $A(x) < 0$. Для любого x из интервала $(-\infty; -2)$ имеем $x + 2 < 0$ и $x - 3 < 0$, поэтому $A(x) > 0$. Следовательно, множество всех решений неравенства составляет интервал $(-2; 3)$.

Ответ: $(-2; 3)$.

Во многих случаях процесс решения неравенства можно упростить, действуя по правилу, называемому **методом интервалов.**

Рассмотрим, как можно решить неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0 \tag{1}$$

и

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0, \tag{2}$$

где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Для вывода правила проведём следующие рассуждения.

Отметим на координатной оси Ox число x_0 (рис. 32).

Точка x_0 делит ось Ox на две части:

1) для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен;

2) для любого x, находящегося слева от точки x_0, двучлен $x - x_0$ отрицателен.

Это свойство двучлена лежит в основе метода интервалов. Пусть, например, требуется решить неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) > 0 \tag{3}$$

или неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0, \tag{4}$$

где $x_1 < x_2 < x_3$.

Отметим на оси Ox точки x_1, x_2 и x_3. Они делят ось Ox на четыре интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ (рис. 33).

Рассмотрим выражение

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \tag{5}$$

Очевидно, что для любого x, находящегося справа от x_3, любой двучлен в произведении (5) положителен, так как точка x находится правее всех точек x_1, x_2, x_3. Поэтому и $A(x) > 0$ для любого x, принадлежащего интервалу $(x_3; +\infty)$.

Для любого x, находящегося между точками x_2 и x_3, последний сомножитель в произведении (5) отрицателен, так как x находится левее точки x_3, а любой из оставшихся сомножителей положителен, так как x находится правее точек x_1 и x_2. Поэтому $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(x_2; x_3)$.

Аналогично рассуждая, получим, что $A(x) > 0$ для любого x из интервала $(x_1; x_2)$ и $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(-\infty; x_1)$.

На этом рассуждении основан **метод интервалов** решения неравенств (3) и (4), состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки

Рис. 32

Рис. 33

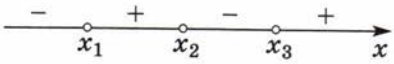


Рис. 34

x_1, x_2, x_3, над интервалом $(x_3; +\infty)$ ставят знак «плюс», над интервалом $(x_2; x_3)$ ставят знак «минус», над интервалом $(x_1; x_2)$ — знак «плюс», над интервалом $(-\infty; x_1)$ — знак «минус» (рис. 34).

Тогда множество всех решений неравенства (3) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «плюс», а множество всех решений неравенства (4) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «минус».

Отметим, что сами числа x_1, x_2, x_3 не являются решениями неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$. Этим объясняется, что множество решений этих неравенств состоит из интервалов, а не из отрезков или полуинтервалов.

Подобным образом можно решать неравенства (1) и (2).

Отметим, что фактически этим же методом мы решали неравенства второй степени с положительным дискриминантом.

Пример 2. Решим неравенство

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0. \qquad (6)$$

Будем решать неравенство (6) методом интервалов. Отметим на оси Ox точки 1, 2, 3. Над интервалами $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ справа налево поочерёдно расставим знаки «плюс» и «минус» (рис. 35), начиная со знака «плюс». Из рисунка видно, что множество всех решений неравенства (6) состоит из двух интервалов $(1; 2)$ и $(3; +\infty)$. (На рисунке они отмечены дугами.)

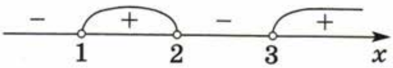


Рис. 35

Ответ: $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) < 0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) нельзя решать, как предыдущие неравенства, так как не все двучлены в его левой части находятся в первой степени. Для решения таких неравенств обычно применяется **общий метод интервалов**, состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки 1, 2, 3, 4, а затем в каждом из интервалов

$$(-\infty; 1),\ (1; 2),\ (2; 3),\ (3; 4),\ (4; +\infty) \qquad (9)$$

определяют знак многочлена

$$A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) \qquad (10)$$

следующим образом: над интервалом справа от наибольшего корня многочлена $A(x)$ ставят знак «плюс», так как на этом интервале все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень меняют знак, если соответствующий этому корню двучлен возведён в нечётную степень, и сохраняют знак, если он возведён в чётную степень, так как знаки двучлена и его нечётной степени совпадают, а чётная степень двучлена всюду положительна, кроме корня этого двучлена. Над каждым интервалом ставят найденный знак «плюс» или «минус». Тогда множество всех решений неравенства (8) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «минус».

Определим знак многочлена (10) в каждом из интервалов (9). Над интервалами (9) должны стоять знаки, как на рисунке 36, так как при $x > 4$ все множители положительны; в точке 4 произведение меняет знак — разность $(x - 4)$ возведена в нечётную степень 1; в точках 3 и 2 произведение не меняет знака — разности $(x - 3)$ и $(x - 2)$ возведены в чётную степень; в точке 1 произведение меняет знак — разность $(x - 1)$ возведена в нечётную степень. Поэтому множество всех решений неравенства (8) состоит из трёх интервалов: $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$.

Рис. 36

Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$(4 - 3x - x^2)(x^2 - 4x + 5)(x - 1) < 0. \qquad (11)$$

Прежде всего исследуем квадратные трёхчлены в левой части неравенства (11). У квадратного трёхчлена $4 - 3x - x^2$ дискриминант $D = 25 > 0$, поэтому этот квадратный трёхчлен имеет два корня $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$ и справедливо тождество

$$4 - 3x - x^2 = -(x - 1)(x + 4). \qquad (12)$$

У квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 5$ дискриминант $D = -4 < 0$, поэтому этот квадратный трёхчлен не имеет корней и для любого x справедливо неравенство $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Используя тождество (12), перепишем неравенство (11) в виде

$$-(x^2 - 4x + 5)(x + 4)(x - 1)^2 < 0. \qquad (13)$$

Это неравенство надо решать, учитывая, что для всех x множитель $x^2 - 4x + 5$ положителен. Для этого отметим на оси Ox точки -4 и 1 и определим знак левой части неравенства (13) в каждом из полученных интервалов (рис. 37).

Рис. 37

Получаем, что множество всех решений неравенства (11) есть множество $(-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

125. а) В чём заключается метод интервалов решения неравенств? К неравенствам какого вида он применим?

б) Равносильны ли неравенства $x > 2$ и $x - 2 > 0$?

в) Верно ли, что если $x > 1$, то $x - 1 > 0$?

г) Верно ли, что если $x < 1$, то $x - 1 < 0$?

126. Если число x расположено на координатной оси левее числа 5, верно ли, что: а) $x - 5 < 0$; б) $x - 5 > 0$?

127. Если число x расположено на координатной оси правее числа -2, верно ли, что: а) $x - (-2) < 0$; б) $x + 2 > 0$?

128. 1) Если число x расположено на координатной оси левее числа 4, верно ли, что: а) $x - 5 < 0$; б) $x - 12 > 0$?
2) Если число x расположено на координатной оси правее числа 10, верно ли, что: а) $x - 1 < 0$; б) $x - 9 > 0$?

129. а) Если число x расположено между числами 1 и 3, то какой знак имеет каждый из двучленов $x - 1$ и $x - 3$?
б) Если число x расположено между числами -3 и -1, то какой знак имеет каждый из двучленов $x + 3$ и $x + 1$?

130. Дан двучлен $x - 6$. При каких значениях x этот двучлен принимает:
а) значение, равное нулю;
б) положительные значения;
в) отрицательные значения?

131. а) Если число x расположено между числами 2 и 5, какой знак имеет каждый из двучленов $x - 2$ и $x - 5$? Какой знак имеет выражение $(x - 2)(x - 5)$?
б) Если число x расположено левее числа -7, какой знак имеет каждый из двучленов $x + 7$ и $x - 8$ и выражение $(x + 7)(x - 8)$?

132. На координатной оси отмечены числа 1, 2 и 3. Определите знаки каждого двучлена $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ и знак выражения $(x-1)(x-2)(x-3)$ на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$.

133. а) Найдите все такие x, для каждого из которых выражение $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$ принимает значение, равное нулю.
б) Определите интервалы, на которых выражение $(x - 1) \times$ $\times (x - 3)(x - 4)$ принимает положительные значения; отрицательные значения.

Решите неравенство методом интервалов (**134—140**):

134. а) $(x - 1)(x - 3)(x - 5) > 0$; б) $(x - 1)(x - 2)(x - 4) < 0$;
в) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$; г) $(x + 2)(x + 1)(x - 3) < 0$.

135. а) $(x^2 + x)(5x + 5) < 0$; б) $(3x + 12)(2x + 10)(x^2 - 2x) > 0$;
в) $(6x^2 - 12x)(x + 4) < 0$; г) $(2x^2 - 16x)(4x + 4)(7x - 21) > 0$.

136. а) $(2 - x)(x + 3)(x - 7) < 0$; б) $(5 - x)(x - 3)(x + 12) > 0$;
в) $(3x - 4)(1 - x)(2x + 1) > 0$; г) $(2x - 5)(7x + 3)(x + 8) < 0$;
д) $(5x - 6)(6x - 5)(1 - x)(3x + 1) > 0$;
е) $(10x - 1)(x + 2)(7x - 4)(7x + 5) < 0$.

137. а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) > 0$; б) $(2 - x)(x^2 - x - 12) < 0$;
в) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 12) < 0$;
г) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 + 2x - 15) > 0$.

138. а) $(x^2 - 16)(x^2 - x - 2)(x + 2) > 0$;
б) $(2 - 4x)(x^2 - x - 2) < 0$;
в) $(-4 - 3x)(x^2 + 3x - 4) > 0$.

139. а) $(x - 2)^2(x - 1) > 0$; б) $(x + 4)(x + 3)^2 < 0$;
в) $(3x - 1)^3(x + 1) > 0$; г) $(x + 2)(5x + 3)^2 < 0$;
д) $(4 + x)(9 - x^2)(x^2 - 2x + 1) > 0$;
е) $(x - 1)(25 - x^2)(x^2 - 4x + 4) > 0$;
ж) $(3x - 7)(x^2 + 2x + 2) < 0$;
з) $(5x - 8)(x^2 - 4x + 5) > 0$;
и) $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) < 0$;
к) $(-x^2 + 6x - 10)(x^2 - 5x + 6)(x - 2) > 0$.

140. **Исследуем.** а) При каких значениях a множество решений неравенства $(x - 3)(x - 5)(x - a)^2 > 0$ состоит из двух интервалов? из трёх интервалов?
б) При каких значениях a множество решений неравенства $(x - 3)(x - 5)(x - a)^2 < 0$ состоит из одного интервала? из двух интервалов?

3.2. Решение рациональных неравенств

Пусть дана алгебраическая дробь $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Неравенство

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \tag{1}$$

называют **рациональным неравенством с одним неизвестным.**

Напомним, что решением неравенства с одним неизвестным x называют такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство (1) — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Легко видеть, что любое решение неравенства (1) есть решение неравенства

$$A(x) \cdot B(x) > 0. \tag{2}$$

Действительно, если число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство $\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$, означающее, что числа $A(x_0)$ и $B(x_0)$ одного знака, т. е. что

$$A(x_0) \cdot B(x_0) > 0,$$

а это означает, что x_0 есть решение неравенства (2). Аналогично показывается, что любое решение неравенства (2) есть решение неравенства (1). Следовательно, неравенства (1) и (2) равносильны.

Пример 1. Решим неравенство

$$\frac{x-3}{x-2} > 0. \qquad (3)$$

Неравенство (3) равносильно неравенству $(x-3)(x-2) > 0$.

Применяя метод интервалов (рис. 38), находим, что множество всех решений неравенства (3) состоит из двух интервалов: $(-\infty; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Рис. 38

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2} < 0. \qquad (4)$$

Разложим на линейные множители квадратные трёхчлены

$$x^2 - 2x - 3 \qquad (5)$$

и

$$x^2 - 3x + 2. \qquad (6)$$

Квадратный трёхчлен (5) имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, и его можно разложить на линейные множители:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - (-1))(x - 3).$$

Квадратный трёхчлен (6) имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, и его можно разложить на линейные множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Следовательно, неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{(x-(-1))(x-3)}{(x-1)(x-2)} < 0.$$

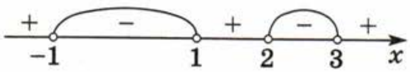


Рис. 39

Это неравенство равносильно неравенству

$$(x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0.$$

Применяя метод интервалов (рис. 39), находим, что множество всех решений неравенства (4) состоит из двух интервалов $(-1; 1)$ и $(2; 3)$.

Ответ: $(-1; 1) \cup (2; 3)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-2} > 0. \qquad (7)$$

Неравенство (7) равносильно неравенству

$$(x - 1)(x - 2)^2 > 0.$$

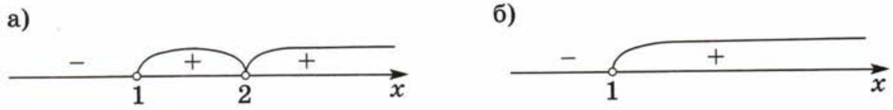


Рис. 40

Применяя общий метод интервалов (рис. 40, *а*), получим, что множество всех решений неравенства (7) состоит из объединения двух интервалов $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Замечание. При решении неравенства (7) нельзя сокращать дробь на двучлен $(x - 2)$, так как такое сокращение приведёт к неравенству

$$x - 1 > 0, \tag{8}$$

неравносильному неравенству (7). В самом деле, множество решений неравенства (8) содержит число 2 (рис. 40, *б*), не являющееся решением неравенства (7).

Пусть даны алгебраические дроби $\frac{A_1(x)}{B_1(x)}$ и $\frac{A_2(x)}{B_2(x)}$, где $A_1(x)$, $B_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$ — многочлены относительно x. Неравенство

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)} > \frac{A_2(x)}{B_2(x)} \tag{9}$$

также называют рациональным неравенством. Для его решения надо перенести все его члены в левую часть, вычесть дроби в левой части и, не сокращая числитель и знаменатель дроби на общие множители, привести неравенство (9) к виду

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \tag{10}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Затем решить неравенство (10). Так как неравенства (9) и (10) равносильны, то все решения неравенства (10) будут всеми решениями неравенства (9).

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}. \tag{11}$$

Перенеся дробь $\frac{1}{x}$ в левую часть неравенства (11), получим неравенство

$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0, \tag{12}$$

равносильное неравенству (11).

Вычитая дроби в левой части неравенства (12), получим неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(2x + 3)} > 0, \qquad (13)$$

равносильное неравенству (12). Разложив квадратный трёхчлен $x^2 - 2x - 3$ на множители, перепишем неравенство (13) в виде

$$\frac{(x + 1)(x - 3)}{2(x - 0)\left(x + \frac{3}{2}\right)} > 0.$$

Рис. 41

Это неравенство равносильно неравенству

$$\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x - (-1))(x - 0)(x - 3) > 0.$$

Применив метод интервалов (рис. 41), получим, что множество всех решений неравенства (11) состоит из объединения интервалов $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(3; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Пример 5. Решим неравенство

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(x + 1)(x - 2)} < \frac{3(x^2 - 3x - 4)}{x^2 - x - 2}. \qquad (14)$$

Перенеся все члены неравенства в левую часть и учитывая, что $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, получим неравенство

$$\frac{(x - 3)(x^2 - 3x - 4)}{(x + 1)(x - 2)} < 0, \qquad (15)$$

равносильное неравенству (14). Так как $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, то неравенство (15) можно переписать в виде

$$\frac{(x - 3)(x + 1)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)} < 0. \qquad (16)$$

Неравенство (16) равносильно неравенству

$$(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)(x - 4) < 0.$$

Применив общий метод интервалов (рис. 42), получим, что множество всех решений неравенства (14) состоит из объединения трёх интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$ и $(3; 4)$.

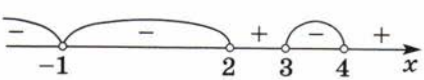


Рис. 42

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (3; 4)$.

141. Какие неравенства называют равносильными? Равносильны ли неравенства:

а) $3x > 0$ и $\frac{3}{x} > 0$; б) $-5x > 0$ и $\frac{5}{x} < 0$;

в) $\frac{x+1}{x+2} < 0$ и $(x+1)(x+2) < 0$?

Решите неравенство (**142—155**):

142. а) $\frac{5}{x} > 0$; б) $-\frac{3}{x} < 0$; в) $\frac{1}{x-1} < 0$; г) $\frac{1}{2x+1} > 0$.

143. а) $\frac{x-1}{x-2} > 0$; б) $\frac{x-4}{x-2} < 0$; в) $\frac{x+3}{x-5} < 0$; г) $\frac{x-7}{x+8} > 0$.

144. а) $\frac{x-6}{2-x} > 0$; б) $\frac{4-x}{x-9} < 0$; в) $\frac{2x+4}{4x+2} < 0$; г) $\frac{3x+6}{9x-3} > 0$.

145. а) $\frac{2x+3}{x-4} < 0$; б) $\frac{7+x}{4x-3} > 0$; в) $\frac{12x-6}{5x-4} > 0$; г) $\frac{7x-1}{2x+5} < 0$.

146. а) $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} > 0$; б) $\frac{(x+1)(x-2)}{x+3} < 0$;

в) $\frac{(x+1)(7-x)}{(8+x)(x-5)} < 0$; г) $\frac{(x-6)(4-x)}{(x-1)(1+x)} > 0$.

147. а) $\frac{4x^2-x}{x+1} > 0$; б) $\frac{3x-x^2}{x-2} < 0$;

в) $\frac{13x-2x^2}{4x-x^2} < 0$; г) $\frac{15x-5x^2}{12x-3x^2} > 0$.

148. а) $\frac{x^2-1}{x+4} > 0$; б) $\frac{x^2-4}{x-3} < 0$;

в) $\frac{x^2-4x+4}{x-1} < 0$; г) $\frac{7+x}{x^2-6x+9} > 0$.

149. а) $\frac{x^2-x-2}{x^2-9} > 0$; б) $\frac{16-x^2}{x^2-5x-6} < 0$;

в) $\frac{x^2-7x+6}{(3x^2-12)(x-1)} < 0$; г) $\frac{25x^2-1}{5x^2-26x+5} < 0$.

150. а) $\frac{x^2-x+2}{x^2-7x+6} < 0$; б) $\frac{x^2+4x-21}{x^2-2x+5} > 0$;

в) $\frac{x^2-3}{7x^2+3x+2} > 0$; г) $\frac{4x^2+5x+3}{5-x^2} < 0$.

151. а) $\frac{1}{x} > 1$; б) $\frac{1}{x} < 1$; в) $\frac{x+1}{x} > 1$; г) $\frac{x-1}{x} < 1$.

152. а) $\frac{x}{x-1} < \frac{1}{x}$; б) $\frac{3}{x} > \frac{5x}{3}$; в) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{3}{x}$; г) $\frac{2}{x} > \frac{x-2}{3-x}$.

153. а) $\frac{x^2-6x+4}{x-1} > 0$; б) $\frac{x^2+6x+6}{x+2} < 0$;

в) $\frac{x^2-5}{2x^2-3x-2} < 0$; г) $\frac{3-x^2}{3x^2-4x-1} > 0$.

154. а) $\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^2} > 0$; б) $\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{x+3} < 0$;

в) $\frac{(x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2} > 0$; г) $\frac{(x+1)(x-2)^3}{x+3} < 0$.

155. а) $\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+3)^2} > 0$; б) $\frac{(x-1)^2(x+2)^2}{x+3} < 0$;

в) $\frac{(x+1)^3(x-2)}{(x-3)^2} < 0$; г) $\frac{(x+1)(x+2)^3}{x+3} < 0$;

д) $\frac{(x-1)^2(x-3)}{x+3} > 0$; е) $\frac{(x-2)^2(x+4)}{x-4} < 0$.

156. **Исследуем**. а) При каких значениях a множество решений неравенства $\frac{(x+5)(x-3)}{(x-a)^2} > 0$ состоит из двух интервалов? из трёх интервалов?

б) При каких значениях a множество решений неравенства $\frac{(x+5)(x-3)}{(x-a)^2} < 0$ состоит из одного интервала? из двух интервалов?

3.3. Системы рациональных неравенств

Если надо найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно всех данных рациональных неравенств, то говорят, что надо **решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным x.**

Для того чтобы решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений — она и будет множеством всех решений системы.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)(x-5)(x-7)<0,\\(x-2)(x-3)(x-4)>0.\end{cases} \qquad (1)$$

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений первого неравенства системы (1) состоит из интервалов $(-\infty; 1)$ и $(5; 7)$ (рис. 43, *а*), а множество всех решений второго неравенства системы (1) состоит из интервалов $(2; 3)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 43, *б*).

Отметим на координатной оси Ox первое и второе множества (рис. 43, *в*). Общая часть этих множеств — интервал $(5; 7)$. Следовательно, множество всех решений системы (1) составляет интервал $(5; 7)$.

Ответ: $(5; 7)$.

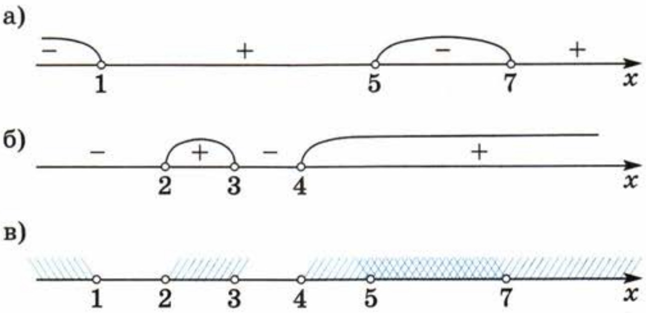


Рис. 43

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases}x^2-6x+10<0,\\ \dfrac{x^9-x^3+x+2}{x^4-x^2+1}>0.\end{cases} \qquad (2)$$

Выделяя полный квадрат, получаем, что

$$x^2-6x+10=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+10=(x-3)^2+1.$$

Поэтому первое неравенство системы (2) можно записать так:

$$(x-3)^2+1<0,$$

откуда видно, что оно не имеет решений.

Теперь можно не решать второе неравенство системы (2), так как ответ уже ясен: система неравенств (2) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Замечание. Если система неравенств имеет решения, то говорят, что она совместна, а если она не имеет решений, то говорят, что она несовместна.

157. а) Что значит решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным?

б) Как решают системы рациональных неравенств с одним неизвестным?

158. Является ли какое-нибудь из чисел: –1, 1, 0, 2 — решением системы неравенств:

а) $\begin{cases}(x-3)^2>0,\\(x-2)(x-5)<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+4)(x-4)>0,\\(x+5)^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-3x+5>0,\\\dfrac{1}{x-4}<2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x+4}{x}>5,\\x^2-6x-8<0?\end{cases}$

Решите систему неравенств (**159—164**):

159. а) $\begin{cases}(x+1)(x-3)<0,\\(x+2)(x-1)<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x-5)(x-6)>0,\\(x+3)(x-4)<0.\end{cases}$

160. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)<0,\\x(x-3)>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+10)(x-13)>0,\\(x+8)(x-12)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-4<0,\\x>9;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x<-2,\\x^2-9>0.\end{cases}$

161. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)>0,\\(x-1)(x-3)>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3)(x+2)<0,\\(x-4)(x+2)>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+1)(x-1)>0,\\(x+1)(x-3)<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x+4)(x-6)>0,\\x^2-1<0.\end{cases}$

162. а) $\begin{cases}(x-5)(x+1)>0,\\(x-10)^2>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+2)(x+3)<0,\\(x+2)^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-4x+3>0,\\x^2(x-7)^2>0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x^2-1)(x+3)>0,\\(x+5)^2(x-1)^2>0.\end{cases}$

163. а) $\begin{cases}(x-2)(x-3)>0,\\\dfrac{x+2}{(x-4)(x+4)}>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+2)(x+10)<0,\\\dfrac{x-3}{(x+4)(x+7)}<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+3}>0,\\\dfrac{x+7}{x-3}<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-4}<0,\\\dfrac{x+8}{x-7}>0.\end{cases}$

164. а) $\begin{cases} x^2 > 4, \\ \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 16} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 < 25, \\ \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 6x + 9} < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4} > 0, \\ \dfrac{x - 5}{x^2 - 4} < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 1} < 0, \\ \dfrac{x - 2}{x^2 - 9} > 0. \end{cases}$

3.4. Нестрогие неравенства

Рассмотрим решение нестрогих неравенств

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Если некоторое число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} \geqslant 0.$$

Тогда в силу определения знака нестрогого неравенства справедливо или числовое равенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = 0,$$

или числовое неравенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0.$$

Иначе говоря, если число x_0 есть решение неравенства (1), то оно либо решение уравнения

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, \tag{2}$$

либо решение неравенства

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0. \tag{3}$$

Заметим, что любое решение уравнения (2) и любое решение неравенства (3) есть решение неравенства (1).

Следовательно, **множество всех решений неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, есть объединение множества всех решений уравнения $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ и множества всех решений неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$.**

Аналогично можно доказать, что **множество всех решений неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, есть объединение множества всех решений уравнения $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ и множества всех решений неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$.**

Заметим, что если многочлен $B(x)$, стоящий в знаменателе алгебраической дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, есть число 1, то приведённые выше рассуждения применимы и для решения неравенств $A(x) \geqslant 0$ и $A(x) \leqslant 0$, где $A(x)$ — многочлен относительно x, т. е. множество всех решений неравенства $A(x) \geqslant 0$ есть объединение множеств всех решений уравнения $A(x) = 0$ и неравенства $A(x) > 0$; множество всех решений неравенства $A(x) \leqslant 0$ есть объединение множеств всех решений уравнения $A(x) = 0$ и неравенства $A(x) < 0$.

Пример 1. Решим неравенство

$$3x - 7 \geqslant 0. \tag{4}$$

Сначала решим уравнение

$$3x - 7 = 0. \tag{5}$$

Его единственное решение $x_0 = \frac{7}{3}$.

Затем решим неравенство

$$3x - 7 > 0. \tag{6}$$

Множество всех решений неравенства (6) состоит из всех $x > \frac{7}{3}$. Объединяя множества всех решений неравенства (6) и уравнения (5), получаем, что множество всех решений неравенства (4) составляет полуинтервал $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0. \tag{7}$$

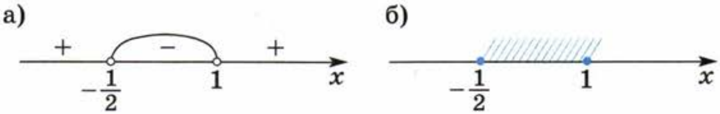


Рис. 44

Сначала решим уравнение

$$2x^2 - x - 1 = 0. \qquad (8)$$

Оно имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим неравенство

$$2x^2 - x - 1 < 0. \qquad (9)$$

Так как квадратный трёхчлен $2x^2 - x - 1$ имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$, то неравенство (9) можно записать в виде

$$2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 1) < 0.$$

Решая его методом интервалов (рис. 44, *а*), получаем, что множество всех решений неравенства (9) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Объединяя множества всех решений неравенства (9) и уравнения (8), получаем (рис. 44, *б*), что множество всех решений неравенства (7) составляет отрезок $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Пример 3. Решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0. \qquad (10)$$

Сначала решим уравнение

$$9x^2 - 6x + 1 = 0. \qquad (11)$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{3}$.

Теперь решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 < 0. \qquad (12)$$

Так как квадратный трёхчлен $9x^2 - 6x + 1$ имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{3}$, то неравенство (12) можно записать в виде

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < 0.$$

Следовательно, нет ни одного действительного числа x, удовлетворяющего этому неравенству (квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным). Поэтому неравенство (12) не имеет решений.

Итак, неравенство (10) имеет единственное решение $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} \leqslant 0. \qquad (13)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} = 0. \qquad (14)$$

Оно имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$ и других корней не имеет.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-0)} < 0. \qquad (15)$$

Применяя метод интервалов (рис. 45, *а*), находим, что множество всех решений неравенства (15) состоит из двух интервалов $(-3; -2)$ и $(0; 4)$.

Объединив множества всех решений уравнения (14) и неравенства (15), получим (рис. 45, *б*) множество всех решений неравенства (13): $(-3; -2] \cup (0; 4]$.

Ответ: $(-3; -2] \cup (0; 4]$.

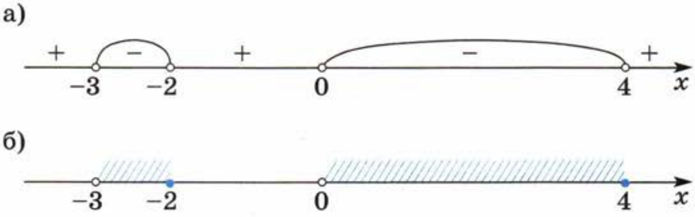


Рис. 45

Пример 5. Решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x} \leqslant 0. \qquad (16)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x} = 0. \qquad (17)$$

Оно имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

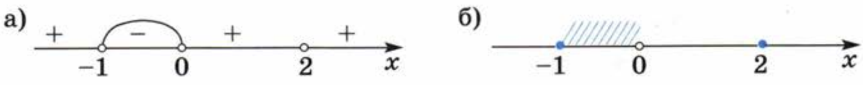


Рис. 46

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x} < 0. \qquad (18)$$

Применяя общий метод интервалов (рис. 46, *а*), получаем, что множество всех решений неравенства (18) есть интервал $(-1; 0)$.

Объединив решения уравнения (17) и неравенства (18), получим (рис. 46, *б*) множество всех решений неравенства (16): $[-1; 0) \cup \{2\}$.

Ответ: $[-1; 0) \cup \{2\}$.

165. Как решают нестрогие неравенства?

Решите неравенство **(166—175)**:

166. а) $2x - 3 \leqslant 0$; б) $4x - 3 \geqslant 0$;
в) $5x - 8 \geqslant 3x - 1$; г) $2x - 4 \leqslant 4x - 3$.

167. а) $x^2 - 12x + 32 \leqslant 0$; б) $x^2 + 8x + 12 \leqslant 0$;
в) $2x^2 + x - 7 \geqslant 0$; г) $3x^2 - 5x - 1 \leqslant 0$.

168. а) $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$;
в) $3x^2 + 18x + 27 \leqslant 0$; г) $2x^2 - 20x + 50 \geqslant 0$.

169. а) $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; б) $x^2 + 7x + 10 \leqslant 0$;
в) $8x^2 - x + 1 \leqslant 0$; г) $4x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.

170. а) $(x^2 - 1)(x + 3) \geqslant 0$; б) $(7 - x)(4 - x^2) \leqslant 0$;
в) $(12 - 5x)(x^2 - 4x + 4) \geqslant 0$; г) $(x^2 - 5x + 6)(x - 3) \leqslant 0$.

171. а) $\frac{1}{x-1} \geqslant 0$; б) $\frac{5}{2-x} \leqslant 0$; в) $\frac{x-8}{2x+3} \geqslant 0$; г) $\frac{3-4x}{5+x} \leqslant 0$.

172. а) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} \geqslant 0$; б) $\frac{x^2 - 7x + 10}{25 - x^2} \geqslant 0$;
в) $1 - x \geqslant \frac{1}{x-3}$; г) $\frac{5}{x} - 4 \leqslant \frac{2x+3}{x-1}$.

173. а) $|x| \leqslant 3$; б) $|x| \geqslant 4$; в) $|x - 3| \leqslant 5$;
г) $|x - 6| \geqslant 1$; д) $|x + 4| \geqslant 2$; е) $|x + 2| \leqslant 4$.

174. а) $1 \leqslant |x - 2| \leqslant 4$; б) $5 \leqslant |x - 3| \leqslant 7$;
в) $1 < |x + 2| \leqslant 3$; г) $3 \leqslant |x + 4| < 5$.

175. а) $|x^2 - 6x + 7| \geqslant 2$; б) $|x^2 - 9x + 19| \leqslant 1$;
в) $2 \leqslant |x^2 - 2x - 1| < 7$; г) $3 < |2x^2 - 8x + 3| \leqslant 13$.

Решите систему неравенств (176—178):

176. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)>0,\\(x+1)(x-3)\leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3)(x+2)\leqslant 0,\\x(x-4)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-5x+6\leqslant 0,\\x^2+x-2>0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+5x+6\geqslant 0,\\x^2-4x+3<0.\end{cases}$

177. а) $\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1}<0,\\x+3\geqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-1}\geqslant 0,\\x+2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}|x|<2,\\(x-3)(x-2)\geqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}|x|>4,\\(x+5)(x-4)\leqslant 0.\end{cases}$

178. а) $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-9}\leqslant 0,\\\dfrac{x^2-4}{x+2}\geqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-1}\geqslant 0,\\\dfrac{x^2-16}{x-4}\geqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-3x+1}\leqslant 0,\\x^2-4\leqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{3x^2-5x+2}\leqslant 0,\\x(x-4)\leqslant 0;\end{cases}$

д) $\begin{cases}(x+1)(x^2-x-6)\geqslant 0,\\(x-1)(x^2-5x+6)\leqslant 0,\\(x+3)(x^2-4)\geqslant 0;\end{cases}$ е) $\begin{cases}(x+1)(x^2+8x+15)\leqslant 0,\\(x+2)(x^2+10x+24)\geqslant 0,\\(x+3)(x^2+9x+20)\geqslant 0.\end{cases}$

3.5*. Замена неизвестного при решении неравенств

При решении рациональных неравенств иногда удобно применять замену неизвестного. Покажем, как это делается, на примерах.

Пример 1. Решим неравенство

$$(x^2-4x-1)^2-3(x^2-4x-1)-4\leqslant 0. \qquad (1)$$

Введя новое неизвестное $t=x^2-4x-1$, перепишем неравенство (1) в виде

$$t^2-3t-4\leqslant 0. \qquad (2)$$

Неравенству (2) удовлетворяют все t, такие, что $-1\leqslant t\leqslant 4$. Следовательно, все решения неравенства (1) совпадают с решениями двойного неравенства $-1\leqslant x^2-4x-1\leqslant 4$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases}x^2-4x-1\geqslant -1,\\x^2-4x-1\leqslant 4.\end{cases} \qquad (3)$$

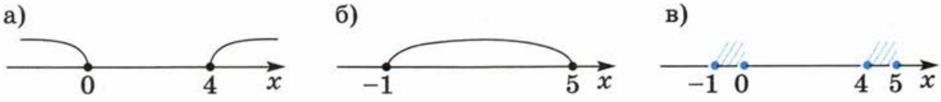


Рис. 47

Первое неравенство системы (3) имеет множество решений $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ (рис. 47, *а*), а второе неравенство системы (3) имеет множество решений $[-1; 5]$ (рис. 47, *б*). Следовательно, система неравенств (3), а значит, и неравенство (1) имеют множество решений $[-1; 0] \cup [4; 5]$ (рис. 47, *в*).

Ответ: $[-1; 0] \cup [4; 5]$.

Пример 2. Решим неравенство

$$x^2 - 5x + 7 - \frac{6}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 0. \tag{4}$$

Введя новое неизвестное $t = x^2 - 5x + 6$, перепишем неравенство (4) в виде

$$t + 1 - \frac{6}{t} \geqslant 0$$

или в виде

$$\frac{t^2 + t - 6}{t} \geqslant 0. \tag{5}$$

Неравенству (5) удовлетворяют все t, такие, что $-3 \leqslant t < 0$, а также все $t \geqslant 2$. Следовательно, все решения неравенства (4) есть объединение всех решений двойного неравенства $-3 \leqslant x^2 - 5x + 6 < 0$ и всех решений неравенства $x^2 - 5x + 6 \geqslant 2$.

Двойное неравенство можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant -3. \end{cases} \tag{6}$$

Первое неравенство системы (6) имеет множество решений $(2; 3)$, решением второго неравенства системы (6) является любое число, поэтому система (6) имеет множество решений $(2; 3)$ (рис. 48, *а*).

Неравенство $x^2 - 5x + 6 \geqslant 2$ имеет множество решений $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ (рис. 48, *б*).

Поэтому неравенство (4) имеет множество решений $(-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; +\infty)$ (рис. 48, *в*).

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; +\infty)$.

Рис. 48

Пример 3. Решим неравенство

$$x^2 - 4x - 5|x - 2| + 10 \leqslant 0. \qquad (7)$$

Неравенство (7) можно переписать в виде

$$|x - 2|^2 - 5|x - 2| + 6 \leqslant 0.$$

Введя новое неизвестное $t = |x - 2|$, перепишем неравенство (7) в виде

$$t^2 - 5t + 6 \leqslant 0. \qquad (8)$$

Неравенству (8) удовлетворяют все t, такие, что $2 \leqslant t \leqslant 3$, поэтому множество решений неравенства (7) есть множество решений двойного неравенства

$$2 \leqslant |x - 2| \leqslant 3. \qquad (9)$$

Неравенство (9) имеет множество решений $[-1; 0] \cup [4; 5]$. Следовательно, и неравенство (7) имеет то же множество решений.

Ответ: $[-1; 0] \cup [4; 5]$.

Решите неравенство (**179—183**):

179. а) $(x - 3)^4 - 5(x - 3)^2 + 4 < 0$;
б) $(x + 1)^4 - 13(x + 1)^2 + 36 \leqslant 0$;
в) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 + 4 \geqslant 0$;
г) $(x - 3)^4 - 10(x - 3)^2 + 9 > 0$.

180. а) $(x^2 + 6x + 5)^2 - 2(x^2 + 6x + 5) - 15 < 0$;
б) $(x^2 - 6x + 7)^2 - 9(x^2 - 6x + 7) + 14 \geqslant 0$;
в) $(x^2 + 4x + 2)^2 - 6(x^2 + 4x + 2) - 7 > 0$;
г) $(x^2 + 4x + 1)^2 - 7(x^2 + 4x + 1) + 6 \leqslant 0$.

181. а) $x^2 + 4x - 2 - \dfrac{15}{x^2 + 4x} \leqslant 0$;

б) $x^2 - 6x + 13 + \dfrac{40}{x^2 - 6x} \leqslant 0$;

в) $x^2 - 6x - 4 - \dfrac{36}{x^2 - 6x + 5} \geqslant 0$;

г) $x^2 - 8x + 4 + \dfrac{24}{x^2 - 8x + 15} \geqslant 0$.

182. а) $|x + 4|^2 - 7|x + 4| \geqslant 0$; б) $|x + 7|^2 - 4|x + 7| \leqslant 0$;
в) $(x - 3)^2 - 5|x - 3| + 4 \leqslant 0$; г) $(x + 2)^2 - 7|x + 2| + 12 \leqslant 0$.

183. а) $x^2 - 10x + 37 - 7|x - 5| > 0$;
б) $x^2 + 14x + 54 - 6|x + 7| < 0$;
в) $3x^2 + 12x + 14 - 5|x + 2| \leqslant 0$;
г) $2x^2 - 12x + 23 - 7|x - 3| \geqslant 0$.

184. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 3|x| + 2 > 0, \\ \dfrac{10}{3 - |x|} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5|x| + 4 > 0, \\ \dfrac{11}{5 - |x|} > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{|x| - 1}{|x| + 2} > 0, \\ \dfrac{|x| - 3}{|x| + 4} < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{|x| + 1}{|x| - 4} > 0, \\ \dfrac{|x| - 5}{|x| + 0{,}1} < 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + x + \dfrac{2}{x^2 + x} \geqslant 3, \\ (x^2 + x)^2 - 7(x^2 + x) + 6 \leqslant 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x - 2)^2 + \dfrac{3}{(x - 2)^2} \geqslant 4, \\ (x - 2)^4 - 5(x - 2)^2 + 4 \leqslant 0. \end{cases}$

Дополнения к главе 1

1. Доказательство числовых неравенств

Для числовых неравенств справедливы следующие утверждения:

1. **Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравенств $a < b$ и $b < c$ следует справедливость неравенства $a < c$** (свойство транзитивности неравенств).
2. **Для любых действительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $a + c < b + d$** (одноимённые числовые неравенства можно складывать).
3. **Для любых положительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $a \cdot c < b \cdot d$** (одноимённые числовые неравенства с положительными членами можно почленно перемножать).
4. **Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $a + c < b + c$** (к обеим частям неравенства можно прибавить любое число).
5. **Для любых действительных чисел a, b и любого положительного числа c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $a \cdot c < b \cdot c$** (неравенство можно умножить или разделить на любое положительное число).

Все эти утверждения являются следствиями основных правил, которым подчинены действительные числа. Отметим, что утверждения 1—5 остаются справедливыми, если в них знаки строгих неравенств заменить на знаки нестрогих неравенств.

Поскольку не существует общего приёма доказательства неравенств, то рассмотрим лишь примеры доказательств неравенств с помощью свойств 1—5.

Пример 1. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — действительные числа для любых положительных чисел a и b, то неравенство

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \tag{2}$$

справедливо для любых положительных чисел a и b (квадрат действительного числа неотрицателен).

Применяя формулу квадрата разности и учитывая, что для любых положительных чисел a и b верны равенства $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(\sqrt{b})^2 = b$, перепишем неравенство (2) в виде

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0. \tag{3}$$

По утверждению 4 из справедливости неравенства (3) следует справедливость неравенства

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}. \tag{4}$$

По утверждению 5 из справедливости неравенства (4) следует справедливость неравенства (1), что и требовалось доказать.

Отметим, что левую часть неравенства (1) называют **средним арифметическим чисел a и b**, а правую часть — **средним геометрическим чисел a и b**. Поэтому часто свойство, выраженное неравенством (1), формулируют так:

> **Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.**

Неравенство (1) между средним арифметическим и средним геометрическим часто используют для доказательства неравенств.

Пример 2. Докажем, что для любого положительного числа x справедливо неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2. \tag{5}$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant 1, \tag{6}$$

в левой части которого записано среднее арифметическое положительных чисел x и $\frac{1}{x}$, а в правой — их среднее геометрическое. Следовательно, неравенство (6) справедливо на основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

По утверждению 5 из справедливости неравенства (6) следует справедливость неравенства (5), что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc. \tag{7}$$

Из справедливости неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел следует справедливость неравенств

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad a + c \geqslant 2\sqrt{ac}, \quad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получаем, что справедливо неравенство (7), что и требовалось доказать.

Часто при доказательстве неравенств бывает полезно использовать различные формулы, оценки, группировку слагаемых и т. п.

Пример 4. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$4(a^3 + b^3) \geqslant (a + b)^3. \tag{8}$$

Рассмотрим выражение $A = 4(a^3 + b^3) - (a + b)^3$, преобразуем его:

$$A = 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= (a + b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2) =$$
$$= (a + b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = 3(a + b)(a - b)^2.$$

Теперь очевидно, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $A \geqslant 0$, т. е. доказана справедливость неравенства

$$4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geqslant 0. \tag{9}$$

По утверждению 4 из справедливости неравенства (9) следует справедливость неравенства (8), что и требовалось доказать.

Пример 5. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}. \tag{10}$$

Левую часть неравенства (10) можно записать в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n + 1}$, а правую — в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n}$.

Так как $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n$ для любого натурального числа n, то, разделив обе части этого неравенства на положительное число $\frac{1}{2}(4n^2 + 4n + 1)(4n^2 + 4n)$, получим по утверждению (4), что

$$\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{2}{4n^2 + 4n},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{4}. \qquad (11)$$

Применяя неравенство (10) и утверждение 2, получаем, что справедливо неравенство

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) <$$

$$< \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n + 2}. \qquad (12)$$

Так как для любого натурального числа n

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n + 2} < \frac{1}{2},$$

то, используя транзитивность неравенств (утверждение 1), получаем, что справедливо неравенство

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) < \frac{1}{2}. \qquad (13)$$

Умножив правую и левую части неравенства (13) на $\frac{1}{2}$, получим на основании утверждения 5, что справедливо неравенство (11). Тем самым неравенство (11) доказано.

Пример 7. Пусть a и b — любые действительные числа, такие, что $a + b = 2$. Докажем, что

$$a^4 + b^4 \geqslant 2. \qquad (14)$$

Для доказательства обозначим $a = 1 + c$, тогда $b = 1 - c$, где c — некоторое действительное число.

Поэтому, применяя формулы сокращённого умножения, имеем

$$a^4 + b^4 = (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4. \qquad (15)$$

Так как очевидно, что $2 + 12c^2 + 2c^4 \geqslant 2$ для любого действительного числа c, то из справедливости равенства (15) следует справедливость неравенства (14), что и требовалось доказать.

Отметим, что справедливость некоторых неравенств, а также равенств, можно доказать с помощью метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

Доказываем. Докажите неравенство (**185—188**), где a, b, c — действительные числа:

185. а) $4c^2 + 1 \geqslant 4c$; б) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$ $(a + b \geqslant 0)$;

в) $(a + b)^2 \geqslant 4ab$; г) $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$ $(a < 0)$;

д) $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqslant 2$ $(a \neq 0)$; е) $\dfrac{2a}{a^2 + 1} \leqslant 1$;

ж) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$ $(ab > 0)$; з) $\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{a^2}{25} \geqslant \dfrac{6}{5}$ $(a \neq 0)$.

186. а) $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a + b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

б) $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$ $(a > 0,\ b > 0)$;

в) $(1 + a)\left(1 + \dfrac{1}{a}\right) \geqslant 4$ $(a > 0)$;

г) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$;

д) $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} \geqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

е) $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 4ab(a - b)^2$.

187. а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;

б) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{bc}{a} \geqslant a + b + c$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$;

в) $-\sqrt{2} \leqslant a + b \leqslant \sqrt{2}$, если $a^2 + b^2 = 1$;

г) $9a + \dfrac{4}{a} \geqslant 12$ $(a > 0)$;

д) $25a + \dfrac{4}{a} \geqslant 20$ $(a > 0)$.

188. а) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; б) $|a - b| \leqslant |a| + |b|$;

в) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Доказываем (**189—191**).

189. Докажите, что:

а) сумма кубов катетов прямоугольного треугольника меньше куба гипотенузы;

б) $a^n < b^n$, если n — натуральное число и $0 < a < b$.

190. *Задача Паппа Александрийского (III в.).* Докажите, что если a, b, c и d — положительные числа и $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$, то верно неравенство $ad > bc$.

191. *Задача Евклида (IV в. до н. э.).* Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа и a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то верно неравенство $a + d > b + c$.

2. Производные линейной и квадратичной функций

Средняя скорость. Начнём с примера.

Пример 1. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = 4t^2,$$

где s (м) — путь, пройденный точкой за время t (с).

Спрашивается: какова средняя скорость этой точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$?

Путь, пройденный за время $t_1 = 2$, равен

$$s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16,$$

а путь, пройденный за время $t_2 = 5$, равен

$$s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Но тогда путь, пройденный за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$, равен

$$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84.$$

Средняя же скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{84}{3} = 28.$$

Пусть точка движется прямолинейно по закону

$$s = f(t).$$

Чтобы вычислить её среднюю скорость за промежуток времени от момента t до момента $t + h$, рассуждаем аналогично.

Путь, пройденный точкой за время t, равен $f(t)$.

Путь, пройденный точкой за время $t + h$, равен $f(t + h)$.

Но тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t + h$, равен

$$f(t + h) - f(t).$$

Следовательно, средняя скорость точки за промежуток времени от t до $t + h$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}. \tag{1}$$

Мгновенная скорость. Введём теперь понятие скорости точки в момент времени t, или мгновенной скорости в момент времени t.

Обратимся к примеру 1.

Итак, пусть точка движется по закону $s(t) = 4t^2$.

Зададим момент времени $t = 3$.

Будем вычислять для разных малых h среднюю скорость движения нашей точки за время от $t = 3$ до $t = 3 + h$. Результаты вычислений сведём в таблицу.

h	$[t;\ t + h]$	$v_{ср}$
0,01	[3; 3 + 0,01]	24,04
0,001	[3; 3 + 0,001]	24,004
0,0001	[3; 3 + 0,0001]	24,0004
0,00001	[3; 3 + 0,00001]	24,00004
0,000001	[3; 3 + 0,000001]	24,000004

Из этой таблицы видно, что средняя скорость $v_{ср}$ точки на отрезке времени $[3;\ 3 + h]$ для малых h приближённо равна 24:

$$v_{ср} \approx 24.$$

Это приближение тем лучше, чем меньше h. Можно ещё сказать, что $v_{ср}$ стремится к 24 при h, стремящемся к нулю, т. е.

$$v_{ср} \to 24 \text{ при } h \to 0.$$

В данном случае число 24 называют скоростью точки в момент времени $t = 3$.

В общем случае **если точка движется прямолинейно по закону**

$$s = f(t),$$

то её скоростью, или **мгновенной скоростью,** в момент времени t называют число v, к которому стремится её средняя скорость на промежутке времени $[t;\ t + h]$ при $h \to 0$:

$$v_{ср} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \to v \text{ при } h \to 0.$$

Пример 2. Найдём мгновенную скорость v точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = 4t^2$, в момент времени t.

Средняя скорость за промежуток времени $[t;\ t + h]$ равна

$$v_{ср} = \frac{4(t+h)^2 - 4t^2}{h} = 8t + 4h.$$

Отсюда $8t + 4h \to 8t$ при $h \to 0$. Следовательно, $v = 8t$. Например:

$$v = 16 \text{ при } t = 2,$$
$$v = 24 \text{ при } t = 3.$$

Производные линейной и квадратичной функций. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;\ b)$. Пусть x — любая точка этого интервала. Рассмотрим ещё точки $x + h$ того же интервала.

Число, к которому стремится отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

при h, стремящемся к 0, называют **производной функции f в точке x** и обозначают $f'(x)$ (читается: эф штрих от x):

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x) \text{ при } h \to 0.$$

Если производная при данном значении x существует, то она есть определённое число. Таким образом, если производная от функции существует при каждом значении x из интервала $(a; b)$, то она есть функция от x, определённая на интервале $(a; b)$.

На основании приведённых выше рассуждений можно сказать, что *мгновенная скорость v в момент времени t точки, движущейся по закону $s = f(t)$, равна производной функции f в точке t, т. е. $v = f'(t)$.*

Вычислим производные для некоторых функций, определённых на интервале $(-\infty; +\infty)$.

1) $f(x) = x$. Для любой точки x

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x$ в любой точке x равна 1, т. е. $x' = 1$.

2) $f(x) = C$[1]. Постоянную можно рассматривать как такую функцию от x, которая равна одному и тому же значению C для любого значения x из интервала $(-\infty; +\infty)$. Поэтому для данной функции

$$f(x) = f(x+h) = C,$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

Следовательно, производная постоянной $f(x) = C$ в любой точке x равна нулю, т. е. $C' = 0$.

3) $f(x) = kx + b$, где k и b — данные числа. Для любой точки x имеем

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(k(x+h)+b)-(kx+b)}{h} = k.$$

Следовательно, производная линейной функции $f(x) = kx + b$ в любой точке x равна числу k, т. е.

$$(kx+b)' = k.$$

---

[1] Обозначение C для постоянной происходит от лат. constans (constantis) — постоянный.

Отсюда следует, что если тело движется по линейному закону $s = at + b$, то его мгновенная скорость v в любой момент времени t равна:

$$v = f'(t) = a,$$

т. е. его скорость в этом случае постоянна.

4) $f(x) = x^2$. Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h.$$

Поскольку $2x + h$ стремится к $2x$, когда h стремится к 0, то

$$f'(x) = 2x.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ в любой точке x равна $2x$, т. е.

$$(x^2)' = 2x.$$

5) $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — данные числа. Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = (a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 + bx + c) = \\ = 2axh + bh + ah^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b + ah.$$

Поскольку $2ax + b + ah \to 2ax + b$, когда $h \to 0$, то

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Следовательно, производная квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ в любой точке x равна $2ax + b$, т. е.

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b. \tag{2}$$

Замечание. Так как

$$(ax^2)' = 2ax, \quad (bx)' = b, \quad c' = 0,$$

то равенство (2) может быть записано в виде

$$(ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c'.$$

Это равенство означает, что производная суммы слагаемых ax^2, bx, c равна сумме их производных.

Это утверждение верно и в общем случае:

$$(f(x) + \varphi(x))' = f'(x) + \varphi'(x),$$

но мы не останавливаемся на его обосновании.

6) Из физики мы знаем, что если тело падает под действием силы тяжести с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты, то, поместив начало координат в начальную точку и направив поло-

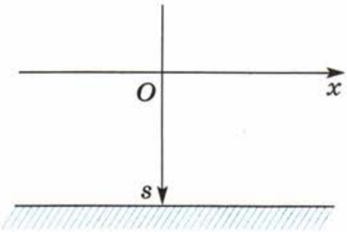


Рис. 49

жительную полуось Os к земле (рис. 49), получим закон движения этого тела:

$$s(t) = \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести ($g \approx \approx 9{,}8$ м/с^2). Но тогда мгновенная скорость падающего тела в момент времени t равна $v = s'(t) = gt$. Мы получили известную в физике формулу для определения скорости этого движения в любой момент времени t: $v = gt$.

Первообразная для линейной функции. Производная функции x^2 равна функции $2x$: $(x^2)' = 2x$.

Но говорят также, что функция x^2 есть первообразная для функции $2x$.

Вообще функцию $F(x)$ называют **первообразной для функции $f(x)$**, определённой на интервале $(a; b)$, если производная функции $F(x)$ равна $f(x)$ на этом интервале:

$$F'(x) = f(x).$$

Заметим, что если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то сумма $F(x) + C$, где C — любая постоянная, также есть первообразная для $f(x)$, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Таким образом, любая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$.

Например, не только x^2 есть первообразная для $2x$, но и $x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, есть первообразная для $2x$.

Отметим равенства

$$C' = 0, \quad (x + C)' = 1, \quad \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x, \quad \left(\frac{ax^2}{2} + bx + C\right)' = ax + b.$$

Из этих равенств следует, что функции

$$C, \quad x + C, \quad \frac{x^2}{2} + C, \quad \frac{ax^2}{2} + bx + C,$$

где C — произвольная постоянная, являются соответственно первообразными для функций 0, 1, x, $ax + b$.

Выше по закону движения определялась скорость движения тела в любой момент времени. Часто требуется решить и обратную задачу: зная скорость движения тела, определить закон движения этого тела.

Отметим сразу, что для решения подобной задачи требуются ещё дополнительные данные о том, где находилось тело в момент начала движения. При решении этих задач существенно используется понятие первообразной. Покажем на примерах, как решают такие задачи.

Пример 3. Пусть тело движется прямолинейно с постоянной скоростью a. Найдём закон движения этого тела $s = f(t)$, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = a$$

и $f(t)$ есть первообразная для a, но тогда

$$s = f(t) = at + C,$$

где C — постоянная. Её значение определяется условиями задачи.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = at.$$

Пример 4. Пусть тело движется прямолинейно со скоростью

$$v = gt + a,$$

где t — время, отсчитываемое с начала движения. Найдём закон движения $s = f(t)$, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = gt + a \qquad (3)$$

и $f(t)$ есть первообразная для функции $gt + a$. Но тогда

$$s = f(t) = \frac{gt^2}{2} + at + C,$$

где C — постоянная. Её значение определяется условиями задачи.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = \frac{gt^2}{2} + at.$$

Заметим, что $v = a$ при $t = 0$ (см. (3)). Это показывает, что в момент начала движения тело имело начальную скорость $v = a$.

192[1]. Как вычисляют среднюю скорость движения тела $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени от t до $t + h$, если известен закон прямолинейного движения тела $s(t)$?

193. Какова средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за промежутки времени

$$\left[5;\ 5 + \frac{1}{10}\right],\quad \left[5;\ 5 + \frac{1}{100}\right],\quad \left[5;\ 5 + \frac{1}{10000}\right]$$

для тел, законы прямолинейного движения которых таковы:
а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s(t) = 3t^2 + 4$?

[1] В заданиях данного пункта время измеряется в секундах, путь — в метрах, а скорость — в метрах в секунду.

194. Что называют мгновенной скоростью точки, движущейся прямолинейно по закону $s = f(t)$, в момент времени t?

195. Какова мгновенная скорость v в момент времени t для тел, законы прямолинейного движения которых таковы:
а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s(t) = 3t^2 + 4$?

196. Дан закон прямолинейного движения материальной точки:
а) $s(t) = 2t$; б) $s(t) = 2t + 3$.
Вычислите мгновенную скорость v точки в момент $t_0 = 0; 1; 5$. Выразите v как функцию t и постройте график этой функции, если $t \in [0; 5]$.

197. а) Что называют производной функции $f(x)$ в точке x?
б) Чему равна мгновенная скорость тела, движущегося по закону $s = f(t)$?
в) Чему равна производная постоянной?
г) Чему равна производная функции $y = kx + b$?

198. Какова производная в точке x функции:
а) $y = 2x + 3$;
б) $y = -2 - 3x$;
в) $y = 2x^2 - 3x + 1$;
г) $y = -x^2 + 2x - 1$?

199. Закон прямолинейного движения точки определяется функцией:
а) $y = 3t$; б) $y = 3t^2 + 1$.
Какова скорость её движения в момент времени t, в частности $t = 2$?

200. а) Что называют первообразной для функции $f(x)$?
б) Однозначно ли определяется первообразная для данной функции?

201. Чему равна первообразная для функции:
а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = 1$;
в) $f(x) = x$; г) $f(x) = ax + b$?

202. Для решения каких физических задач применяется первообразная?

203. Чему равна первообразная для функции:
а) $y = 2$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = x + 1$;
г) $y = -x - 4$; д) $y = 2 - 2x$?

204. Скорость материальной точки определяется формулой:
а) $v(t) = 3$; б) $v(t) = 2t$; в) $v(t) = 2t + 1$.
Задайте формулой закон движения материальной точки $s(t)$, если известно, что $s(0) = 0$.

205. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, задаётся формулой

$$v(t) = v_0 - gt,$$

а высота H — формулой

$$H(t) = H_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение земного притяжения, H_0 — начальная высота. Докажите, что:

а) функция $v(t)$ есть производная функции $H(t)$;

б) функция $H(t)$ есть первообразная функции $v(t)$.

206. Зависимость пути s от времени t при прямолинейном движении точки задана графически (рис. 50). Постройте график зависимости скорости v от времени t для $t \in [0; 2]$.

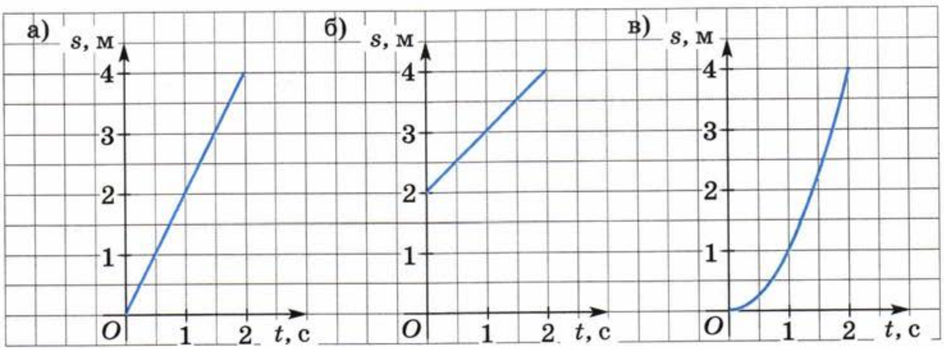


Рис. 50

207. Зависимость скорости v от времени t при прямолинейном движении точки задана графически (рис. 51). Постройте график зависимости пути s от времени t для $t \in [0; 2]$.

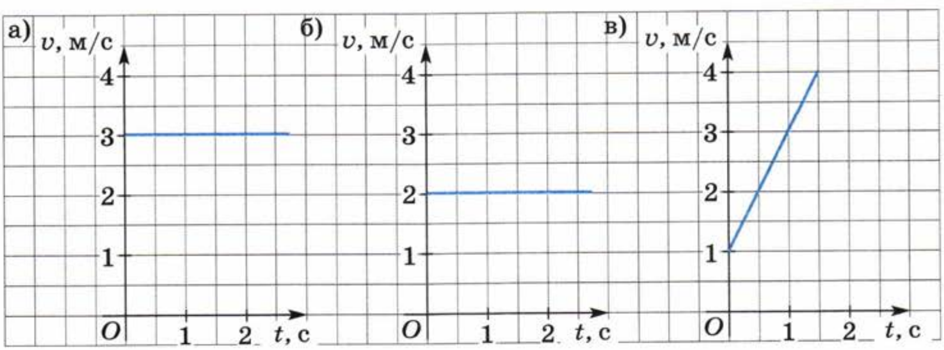


Рис. 51

3. Исторические сведения

Понятия равенства и неравенства чисел возникли в глубокой древности. Так, задачи на доказательство равенств и неравенств встречаются в математических работах, где для обозначения равенства и неравенства использовали слова или специальные обозначения, происходившие от сокращения этих слов. Ещё более 2000 лет до н. э. было известно неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

Задачи, связанные с неравенствами, встречаются в V книге «Начал» Евклида (IV в. до н. э.). Там, например, доказано, что если a, b, c и d — положительные числа и a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $a + d > b + c$. В основном труде Паппа Александрийского (III в.), названном «Математическое собрание», например, доказывается, что если a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $ad > bc$.

Евклид

Отметим, что равенства и неравенства математики древности доказывали, опираясь на геометрические построения, так как алгебраический аппарат ещё не был развит.

Современные специальные знаки для обозначения равенства и неравенства стали применять сравнительно недавно. Знак равенства = ввёл в 1557 г. английский математик Р. Рикорд. Он мотивировал это так: никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка. Знаки неравенства > и < ввёл в своей книге «Практика аналитического искусства» (1631) английский учёный Харрит. Знаки нестрогого неравенства ⩾ (не меньше) и ⩽ (не больше) введены в 1734 г. французским математиком П. Буге.

В Средние века много работ было посвящено доказательству равенств и неравенств. В наши дни равенства и неравенства широко используются во всех разделах математики.

Глава 2
СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

При изучении материала главы 2 вам предстоит познакомиться с корнями степени n и их свойствами, научиться преобразованиям алгебраических выражений, содержащих корни степени n. Этот материал составит базу для расширения понятия степени на случай рационального и иррационального показателей.

§ 4. Функция $y = x^n$

4.1. Свойства и график функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$

Функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, ..., рассматриваемые только на промежутке $[0; +\infty)$, имеют ряд одинаковых свойств. Поэтому обычно рассматривают функцию

$$y = x^n, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

где под n подразумевается любое натуральное число, большее 1.

Сформулируем свойства функции (1).

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.
2) Если $x = 1$, то $y = 1$.
3) Если $x > 0$, то $y > 0$.
4) Функция $y = x^n$ является возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.
5) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
6) Функция $y = x^n$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$.

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (1). Геометрически они означают, что график функции $y = x^n$ проходит через начало координат и точку $(1; 1)$.

Свойство 3 следует из того, что если $x > 0$, то $x^n > 0$. Это свойство означает, что график функции $y = x^n$ для $x > 0$ расположен выше оси Ox.

Свойство 4 следует из того, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^n < x_2^n$.

Свойство 5 очевидно. В самом деле, если x стремится к $+\infty$, пробегая натуральные числа 1, 2, 3, 4, ..., то $y = x^n$ тоже стремится к $+\infty$, пробегая числа 1^n, 2^n, 3^n, ... Для остальных чисел x справедливость этого свойства сохраняется.

Свойство 6 для $n = 2$ становится очевидным, если, например, считать, что y есть площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечёт за собой малое изменение площади, а это и означает непрерывность функции $y = x^2$ для положительных x.

Для $n = 3$ свойство 6 также становится очевидным, если, например, считать, что y есть объём куба со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны куба влечёт за собой малое изменение его объёма, а это и означает непрерывность функции $y = x^3$ для положительных x.

Для $n \geqslant 4$ свойство 6 надо доказывать, но это доказательство мы проводить не будем.

Свойство 6 означает, что график функции $y = x^n$ — непрерывная линия на промежутке $[0; +\infty)$.

Замечание. Доказательства свойств 3 и 4 требуют применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

На рисунке 52 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4 \tag{2}$$

пока только для неотрицательных значений x ($x \geqslant 0$). Эти графики отражают свойства функций (2).

Дадим пояснения к рисунку 52.

На интервале (0; 1), т. е. для значений x, для которых

$$0 < x < 1,$$

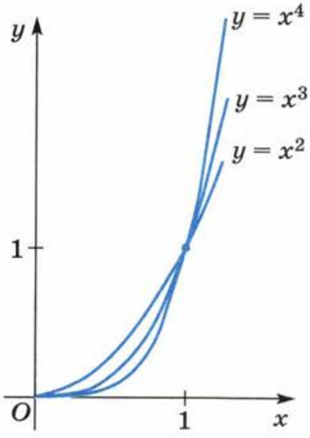


Рис. 52

выполняются неравенства

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \dots . \tag{3}$$

Действительно, умножая неравенство $1 > x$ на x, где x — положительное число, получаем неравенство $x > x^2$. Умножая это неравенство на x ($x > 0$), получаем неравенство $x^2 > x^3$ и т. д.

В силу неравенств (3) график функции $y = x^3$ на интервале (0; 1) расположен ниже графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен ниже графика функции $y = x^3$ и т. д.

Далее, на интервале $(1; +\infty)$, т. е. для значений x, для которых $1 < x$, выполняются неравенства

$$1 < x < x^2 < x^3 < \dots . \tag{4}$$

Действительно, умножая неравенство $1 < x$ на положительное число x, получаем неравенство $x < x^2$. Умножая это неравенство на x $(x > 0)$, получаем неравенство $x^2 < x^3$ и т. д.

Неравенства (4) показывают, что на интервале $(1; +\infty)$ график функции $y = x^3$ расположен выше графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен выше графика функции $y = x^3$ и т. д.

208. а) Возрастает ли на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^n$?
б) Дана функция $y = x^n$. К чему стремится y при $x \to +\infty$?

209. Дана функция $y = x^3$ $(x \geqslant 0)$.
а) Назовите зависимую и независимую переменные.
б) Какова область значений данной функции?
в) Вычислите для данной функции значения $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(2\frac{1}{2}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

210. Дана функция $y = x^4$ $(x \geqslant 0)$. Заполните таблицу значений функции при x, равном 0; 1; 2; 3; 0,5; $\frac{1}{3}$; 0,25; 1,5.

211. Дана функция $y = x^5$ $(x \geqslant 0)$. Верно ли равенство:
а) $y(1) = 5$; б) $y(1) = 1$; в) $y(2) = 32$; г) $y(0) = 0$?

212. Составьте таблицу значений объёма куба, если длина его ребра (в метрах) принимает значения от 0,2 до 2 через 0,2.

213. а) Дана функция $y = x^4$ $(x \geqslant 0)$. При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 16; 81?
б) Дана функция $y = x^3$ $(x \geqslant 0)$. При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 8; 64?

214. При каких значениях x $(x \geqslant 0)$ выполняется неравенство $y_1(x) < y_2(x)$, если:
а) $y_1(x) = x^6$, $y_2(x) = x^3$; б) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^5$?

4.2. Свойства и графики функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$

Рассмотрим теперь свойства функции $y = x^n$ на всей области её определения, т. е. для x, принадлежащих интервалу $(-\infty; +\infty)$.

Для чётных степеней выполняются равенства:

$$(-x)^2 = x^2,\ (-x)^4 = x^4,\ (-x)^6 = x^6.$$

Вообще если $n = 2m$ $(m \in \boldsymbol{N})$ есть чётное натуральное число, то

$$(-x)^{2m} = x^{2m}.$$

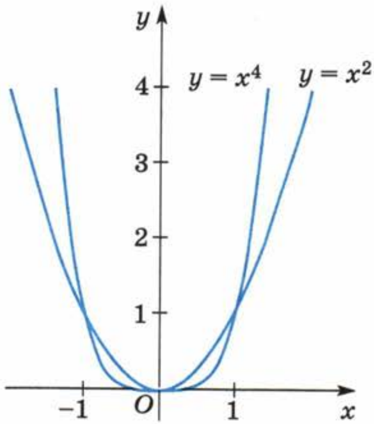


Рис. 53

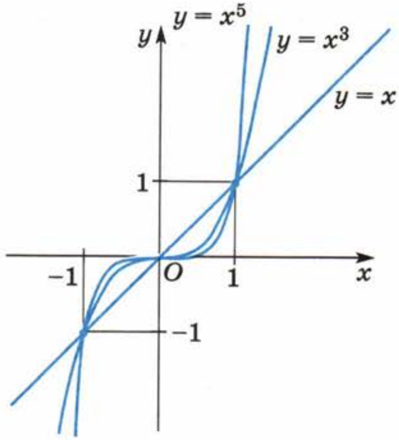


Рис. 54

Действительно,

$$(-x)^{2m} = (-1 \cdot x)^{2m} = (-1)^{2m} \cdot x^{2m} = ((-1)^2)^m \cdot x^{2m} = 1^m \cdot x^{2m} = x^{2m}.$$

Следовательно, **функция $y = x^{2m}$, $m \in N$, чётная и график её симметричен относительно оси Oy.**

На рисунке 53 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$ для любых действительных значений x.

Для нечётных степеней выполняются равенства:

$$(-x)^3 = -x^3, \ (-x)^5 = -x^5, \ (-x)^7 = -x^7.$$

Вообще если $n = 2m + 1$ ($m \in N$) есть нечётное натуральное число, то

$$(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}.$$

Действительно,

$$(-x)^{2m+1} = (-x)^{2m}(-x) = x^{2m}(-1)\,x = -x^{2m+1}.$$

Следовательно, **функция $y = x^{2m+1}$, $m \in N$, нечётная и график её симметричен относительно начала координат.**

На рисунке 54 изображены графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ для любых действительных значений x.

Отметим, что если $n = 2m$ ($m \in N$) — чётное натуральное число, то функция $y = x^{2m}$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$. Эта функция принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$.

Если $n = 2m + 1$ ($m \in N$) — нечётное натуральное число, то функция $y = x^{2m+1}$ является возрастающей на интервале $(-\infty; +\infty)$. Эта функция принимает все значения из интервала $(-\infty; +\infty)$.

Каждая из функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$, $m \in N$, непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

215. Для каких натуральных значений n функция $y = x^n$:
а) чётная; б) нечётная;
в) непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$?

216. Относительно чего симметричен график функции $y = x^n$:
а) при n чётном; б) при n нечётном?

217. Дана функция $y = x^3$. Вычислите значения $y(0)$, $y(1)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(-0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

218. Дана функция $y = x^4$. Заполните таблицу значений функции при x, равном 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; $\frac{1}{2}$; $-0{,}5$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $-0{,}25$; $1\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$.

219. Дана функция $y = x^5$. Верно ли равенство:
а) $y(-2) = -32$; б) $y(-1) = -1$; в) $y(3) = 243$; г) $y(-2) = 32$?

220. Вычислите значения функции $y = x^3$, взяв x от -1 до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

221. При каких значениях аргумента значение функции:
а) $y = x^4$ равно 0; 1; -1; 16;
б) $y = x^3$ равно 0; 1; -1; -8; 64?

222. Какова область значений функции: а) $y = x^4$; б) $y = x^3$?

223. Дана функция $y = x^3$.
а) Какие значения принимает данная функция, если $x \geqslant 0$, $x < 0$?
б) В каких четвертях расположен график данной функции? Ответ обоснуйте.
в) Является ли данная функция чётной (нечётной)? Ответ обоснуйте.
г) Покажите, что данная функция возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$.
д) Постройте в декартовой системе координат точки $(x; x^3)$, взяв x от $-1{,}5$ до $1{,}5$ через $0{,}5$.
е) Постройте в той же системе координат точки $(x; x^3)$, взяв x от $-0{,}5$ до $0{,}5$ через $0{,}2$.
ж) Учитывая непрерывность функции $y = x^3$, постройте её график.
з) Укажите с помощью графика функции $y = x^3$, при каких x значения функции больше 1; меньше -1.

224. Дана функция $y = x^4$. Исследуйте эту функцию по схеме предыдущего задания и постройте её график.

225. Учитывая чётность (нечётность) функции, постройте её график (для построения графика достаточно определить четверти, в которых он расположен, и примерное его расположение с помощью нескольких точек):
а) $y = x^6$; б) $y = x^7$; в) $y = x^8$;
г) $y = x^9$; д) $y = x^{10}$; е) $y = x^4$.

226. Постройте график функции:
а) $y = x^{20}$; б) $y = x^{100}$.

227. Принадлежит ли графику функции $y = x^5$ точка:
а) $A(-1; -1)$; б) $B(2; 64)$; в) $C(2; 32)$?

228. Принадлежит ли графику функции $y = x^6$ точка:
а) $A(-2; 64)$; б) $B(-1; 1)$; в) $C(2; 32)$?

229. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^4$ и $y = x^3$.
а) Сравните значения этих функций на промежутке $(0; 1)$; $(1; +\infty)$.
б) При каких значениях x значения каждой из данных функций больше 0? меньше 0? больше 1? меньше 1?
в) Существуют ли такие значения x, при которых значения функции $y = x^3$ больше соответствующих значений функции $y = x^4$?
г) На каком промежутке каждая из данных функций является возрастающей? убывающей?

230. В одной системе координат с единичными отрезками 10 см на интервале $(-1; 1)$ постройте графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$.

231. Сравните значения функций $y = x$ и $y = x^5$ при значениях аргумента:
а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$; в) $-1 < x < 0$; г) $x < -1$.

232. Сравните значения функций $y = x^4$ и $y = x^6$ при значениях аргумента:
а) $x > 1$; б) $x < -1$; в) $-1 < x < 0$; г) $0 < x < 1$.

233. Дана функция $y = x^{12}$. Сравните:
а) $y(1)$ и $y(2)$; б) $y(-2)$ и $y(-1)$;
в) $y(-3)$ и $y(3)$; г) $y(0)$ и $y(5)$.

234. Дана функция $y = x^9$. Сравните:
а) $y(-1)$ и $y(1)$; б) $y(-2)$ и $y(0)$;
в) $y(4)$ и $y(-5)$; г) $y(6)$ и $y(3)$.

235. Сравните с единицей значения функции $y = x^{18}$:
а) $y(0{,}5)$; б) $y\left(\frac{1}{3}\right)$; в) $y(-2)$;
г) $y(6)$; д) $y(0)$; е) $y(-1)$.

§ 5. Корень степени n

5.1. Понятие корня степени n

Пусть n — натуральное число и $n \geqslant 2$.

Корнем степени n из числа a называют такое число (если оно существует), n-я степень которого равна a.

Мы уже знаем, что корень степени 2 называют также *квадратным корнем*. Корень степени 3 называют ещё *кубическим корнем*.

Пример 1. Равенства $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $(-1)^3 = -1$, $(-2)^3 = -8$, $(-3)^3 = -27$ показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть кубические корни соответственно из чисел -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27.

Пример 2. Равенства $0^5 = 0$, $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $(-1)^5 = -1$, $(-2)^5 = -32$, $(-3)^5 = -243$ показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть корни степени 5 соответственно из чисел -243, -32, -1, 0, 1, 32, 243.

Пример 3. Равенства $0^4 = 0$, $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, $(-1)^4 = 1$, $(-2)^4 = 16$, $(-3)^4 = 81$ показывают, что есть два числа $+1$ и -1, которые являются корнями четвёртой степени из 1; есть два числа $+2$ и -2, являющиеся корнями четвёртой степени из 16; есть также два числа $+3$ и -3, являющиеся корнями четвёртой степени из 81. Далее, 0 есть корень четвёртой степени из 0.

Не существует корня четвёртой степени из отрицательного числа, потому что четвёртая степень любого действительного числа есть число неотрицательное. Здесь и далее речь идёт о существовании действительного числа, являющегося корнем из действительного числа.

В следующем пункте будут получены общие заключения, которые согласуются с рассмотренными выше частными фактами.

236. Что называют корнем: а) квадратным; б) кубическим; в) пятой степени; г) степени n ($n \geqslant 2$, $n \in N$) из числа b?

237. а) Сколько существует корней четвёртой степени из числа 1; 81; 0?

б) Сколько существует корней пятой степени из числа 0; 1; -1?

238. Выпишите все натуральные числа, кубы которых не превышают 10 000.

239. Выпишите все целые числа, четвёртые степени которых не превышают 10 000.

240. Сколько существует натуральных чисел, шестая степень которых не превышает 1 000 000?

241. Найдите ребро куба, если его объём равен:
а) 1 м^3; б) 8 см^3; в) 27 дм^3;
г) 64 мм^3; д) 1000 км^3; е) 1 000 000 м^3.

242. Найдите число, куб которого равен: а) -8; б) 0,001; в) $\frac{1}{27}$.

243. Докажите, что число:
а) 3 есть корень третьей степени из 27;
б) $-0,5$ есть корень четвёртой степени из 0,0625;
в) 7 — корень четвёртой степени из 2401;
г) $-1\frac{1}{3}$ — корень третьей степени из $-2\frac{10}{27}$.

244. Найдите кубический корень из числа:
а) 1000; б) 64 000 000; в) 125 000 000 000;
г) $-0,001$; д) $3\frac{3}{8}$; е) $-1\frac{61}{64}$.
Докажите правильность решения.

245. Найдите корень четвёртой степени из числа:
а) 0; б) 160 000; в) 62 500 000 000;
г) $-0,0001$; д) $1 \cdot 10^{-8}$; е) $1,6 \cdot 10^{-3}$.
Докажите правильность решения.

246. Существует ли корень шестой степени из данного числа, если существует, то единственный ли это корень:
а) 1; б) 0; в) -1; г) 1,2; д) $-1,8 \cdot 10^6$; е) $7,2 \cdot 10^{-6}$?

247. Всегда ли существуют два корня чётной степени из одного и того же неотрицательного числа?

248. Проверьте, является ли число:
а) 6 корнем шестой степени из 46 656;
б) -3 корнем седьмой степени из 2187;
в) -3 корнем седьмой степени из -2187;
г) $-0,4$ корнем пятой степени из $\frac{32}{3125}$.

5.2. Корни чётной и нечётной степеней

Теорема 1

Существует, и притом единственный, корень нечётной степени из любого действительного числа a, при этом корень нечётной степени: а) из положительного числа есть число положительное; б) из отрицательного числа есть число отрицательное; в) из нуля есть нуль.

Доказательство. Применим графический метод. Отметим, что любое нечётное число, большее 1, можно записать в виде $2m + 1$, где m — натуральное число.

Построим в декартовой системе координат xOy график функции

$$y = x^{2m+1}$$

(рис. 55 и 56). Эта функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$, её график — непрерывная кривая, проходящая через начало координат, симметричная относительно начала координат.

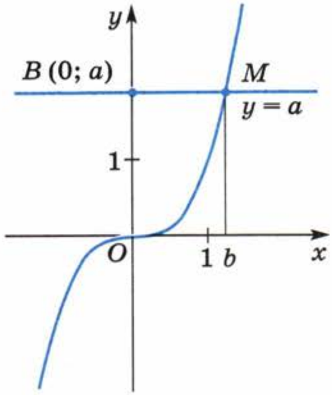


Рис. 55

Зададим произвольное число a. Через точку $B(0; a)$ проведём прямую $y = a$, параллельную оси Ox. Она пересекает график функции $y = x^{2m+1}$ в одной и только одной точке M, что следует из возрастания функции $y = x^{2m+1}$. Точка M имеет ординату $y = a$. Обозначим её абсциссу через $x = b$.

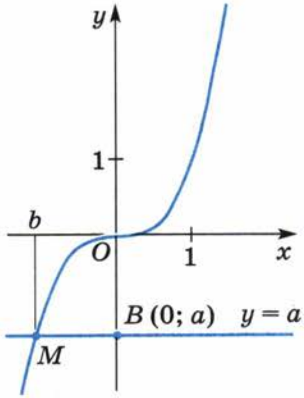


Рис. 56

Таким образом, полученное число b есть единственное, для которого выполняется равенство

$$b^{2m+1} = a.$$

Если $a > 0$, то $b > 0$ (рис. 55).
Если $a < 0$, то $b < 0$ (рис. 56).
Наконец, если $a = 0$, то и $b = 0$.

Итак, показано, что для любого действительного числа a существует, и притом один, корень степени $(2m + 1)$, он обозначается так:

$$\sqrt[2m+1]{a}.$$

Теорема 1 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-8} = -2,$$
$$\sqrt[5]{100\,000} = 10, \quad \sqrt[5]{-100\,000} = -10.$$

Теорема 2

Существуют два и только два корня чётной степени из любого положительного числа, которые отличаются лишь знаками. Корень чётной степени из 0 единственный, равный нулю. Корня чётной степени из отрицательного числа не существует.

Доказательство. Отметим, что всякое положительное чётное число можно записать в виде $2m$, где m — натуральное число.

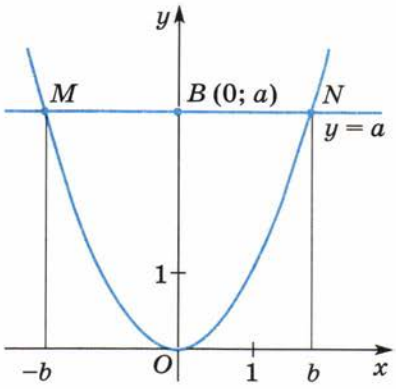


Рис. 57

Если любое число, отличное от нуля, возвести в чётную степень $2m$, то получится положительное число. Если же нуль возвести в степень $2m$, то получится нуль. Это и доказывает, что корень степени $2m$ из нуля единственный, равный нулю, и что корня чётной степени из отрицательного числа не существует.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, применим графический метод. Рассмотрим график функции

$$y = x^{2m}. \qquad (1)$$

Эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, принимая все значения от 0 до $+\infty$, и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, принимая все значения от $+\infty$ до 0. Её график — непрерывная кривая, проходящая через начало координат и симметричная относительно оси Oy (рис. 57).

Зададим произвольное положительное число a $(a > 0)$. Через точку $B(0; a)$ проведём прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает график функции $y = x^{2m}$ в двух и только в двух точках M и N, имеющих одну и ту же ординату a. Абсциссы их в силу симметричности графика относительно оси Oy имеют противоположные знаки. Точка N имеет положительную абсциссу, обозначим её через b $(b > 0)$. Тогда точка M имеет отрицательную абсциссу, равную $(-b)$.

Очевидно, что $b^{2m} = (-b)^{2m} = a$.

Итак, показано, что существуют два и только два корня степени $2m$ из любого положительного числа a. Один из них b, положительный, обозначают так: $\sqrt[2m]{a}$. Другой, отрицательный корень степени $2m$ из a $(a > 0)$ обозначают так: $(-\sqrt[2m]{a})$.

Корень степени $2m$ из числа 0 (как показано выше, единственный, равный 0) обозначают так: $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Теорема 2 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[6]{1\,000\,000} = 10, \quad \sqrt{0} = 0,$$
$$-\sqrt[4]{16} = -2, \quad -\sqrt[6]{1\,000\,000} = -10.$$

Замечание. Записи

$$\sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[4]{-81}, \quad \sqrt[6]{-1\,000\,000}, \quad \sqrt[4]{-13{,}2}, \quad \sqrt[8]{-0{,}1}$$

не имеют смысла, потому что корень чётной степени из отрицательного числа не существует.

Подведём итог. Пусть m — данное натуральное число.

Существует, и притом только один, корень степени $(2m+1)$ из любого действительного числа a. Его обозначают так: $\sqrt[2m+1]{a}$, при этом

$$\text{если } a > 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} > 0,$$
$$\text{если } a = 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} = 0,$$
$$\text{если } a < 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} < 0.$$

Существуют два и только два корня степени $2m$ из любого положительного числа a, они отличаются лишь знаками.

Положительный корень обозначают так: $\sqrt[2m]{a}$, а отрицательный корень так: $(-\sqrt[2m]{a})$.

Нуль есть единственный корень степени $2m$ из числа нуль, его обозначают так: $\sqrt[2m]{0}$. Таким образом, $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Корень степени $2m$ из отрицательного числа не существует.

Замечание. При подробном изучении комплексных чисел показывается, что корни чётной степени из отрицательных чисел являются комплексными числами. Слова «корень чётной степени из отрицательного числа не существует» означают, что не существует действительного числа, являющегося корнем чётной степени из отрицательного числа.

249. а) Сколько существует корней нечётной степени из любого действительного числа?
б) Может ли корень нечётной степени из положительного числа быть числом отрицательным?
в) Будет ли корень нечётной степени из отрицательного числа числом отрицательным?
г) Чему равен корень нечётной степени из нуля?

250. Как обозначают корень нечётной степени из числа a?

251. Как обозначают положительный корень чётной степени из положительного числа? Приведите пример.

252. Как обозначают отрицательный корень чётной степени из положительного числа? Приведите пример.

253. Для любого ли действительного числа существует корень чётной степени?

254. Существует ли корень чётной степени: а) из положительного числа; б) из нуля; в) из отрицательного числа?

255. Чему равен корень чётной степени из нуля?

256. Почему не существует корня чётной степени из отрицательного числа?

257. Используя график функции $y = x^3$, покажите, что существует единственный кубический корень из числа:
а) 1; б) 5; в) 0; г) -3.

258. Используя график функции $y = x^3$, найдите с точностью до единиц: а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[3]{-3}$; г) $\sqrt[3]{-5}$.

259. Прочтите выражение:
а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[7]{-2}$; в) $\sqrt[12]{7}$; г) $-\sqrt[5]{-7}$.

260. Имеет ли смысл запись:
а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{-5}$; в) $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[4]{-5}$; д) $\sqrt[8]{0}$; е) $\sqrt[8]{-0{,}1}$?

261. Верно ли равенство:
а) $\sqrt[3]{-27} = -3$; б) $\sqrt[4]{-6} = -2$; в) $\sqrt[3]{64} = -4$; г) $\sqrt[4]{625} = -5$?

262. Найдите значение выражения:
а) $(\sqrt[5]{2})^5$; б) $(\sqrt[7]{12})^7$; в) $(\sqrt[3]{-8})^3$; г) $(\sqrt[11]{-3})^{11}$.

Вычислите **(263—265)**:

263. а) $\sqrt[3]{2^3}$; б) $\sqrt[3]{5^3}$; в) $\sqrt[3]{(-4)^3}$; г) $\sqrt[3]{(-0{,}5)^3}$;
д) $\sqrt[5]{8 \cdot 4}$; е) $\sqrt[7]{81 \cdot 27}$; ж) $\sqrt[3]{-3{,}6 \cdot 0{,}06}$; з) $\sqrt[3]{-5 \cdot 25}$.

264. а) $\sqrt[3]{1000}$; б) $\sqrt[5]{10\,000\,000\,000}$; в) $\sqrt[5]{3\,200\,000}$; г) $\sqrt[3]{-343\,000\,000}$.

265. а) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{216}}$; в) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{-5\dfrac{23}{64}}$.

266. Решите уравнение, используя график функции:
а) $x^3 = 8$; б) $x^3 = -1$; в) $x^3 = -27$; г) $x^3 = 5$;
д) $x^3 = -7$; е) $x^5 = 1$; ж) $x^5 = 32$; з) $x^5 = 2$.

267. Покажите, используя график функции $y = x^4$, что:
а) существуют два действительных корня четвёртой степени из числа 3;
б) существует единственный действительный корень четвёртой степени из числа 0;
в) не существует действительных корней четвёртой степени из числа -1.

268. Докажите, что число:
а) 10 есть корень шестой степени из 1 000 000;
б) -2 есть корень четвёртой степени из 16;
в) 0,5 есть корень шестой степени из $\dfrac{1}{64}$;
г) $-\dfrac{1}{3}$ есть корень четвёртой степени из $\dfrac{1}{81}$.

269. Вычислите корень: а) $\sqrt[4]{10^4}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{10000}}$; в) $\sqrt[6]{64}$; г) $\sqrt[4]{81}$.
Докажите правильность решения.

270. Верно ли равенство:
а) $\sqrt[4]{16} = -2$; б) $\sqrt[6]{1} = 1$; в) $\sqrt[4]{-16} = -2$; г) $\sqrt[4]{16} = 2$?

271. Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt[8]{35 - 6^2}$; б) $\sqrt[6]{27 - 5^2}$; в) $\sqrt{(-2)^3}$; г) $\sqrt[4]{(-8)^6}$?

272. Проверьте, является ли число:
а) 5 корнем пятой степени из 3125;
б) –2 корнем восьмой степени из 256;
в) 1,1 корнем четвёртой степени из 1,4641;
г) $-\dfrac{2}{3}$ корнем шестой степени из $\dfrac{64}{729}$.

273. Покажите, используя график функции $y = x^4$, что существуют следующие корни, и укажите их значения с точностью до единиц:
а) $\sqrt[4]{3}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $-\sqrt[4]{2}$; д) $\sqrt[4]{0}$; е) $\sqrt[4]{0{,}5}$; ж) $-\sqrt[4]{0{,}5}$.

274. Вычислите: а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{10000}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$.

275. Вычислите:
а) $5 + \sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[6]{64} + 3$; в) $\sqrt[4]{16} - 1$; г) $8 - \sqrt[6]{8^2}$;
д) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[6]{4^3} + \sqrt[3]{-125}$; ж) $\sqrt[4]{16^2}$; з) $\sqrt[4]{25^2}$;
и) $\sqrt[6]{2 \cdot 32}$; к) $\sqrt[6]{16 \cdot 256}$.

276. Решите уравнение, используя график функции:
а) $x^4 = 1$; б) $x^4 = -1$; в) $x^6 = 0$; г) $x^4 = 81$;
д) $x^4 = 4$; е) $x^4 = 25$; ж) $x^6 = 1$; з) $x^6 = 8$.

5.3. Арифметический корень степени n

Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$.

Неотрицательный корень степени n из неотрицательного числа a ($a \geqslant 0$) называют **арифметическим корнем степени n из числа a.**

Как уже отмечалось в пункте 5.2, для нечётного n существует только один корень из любого числа a. При этом он неотрицательный, если a неотрицательно. Поэтому понятия корня нечётной степени из неотрицательного числа a и арифметического корня той же степени из того же самого числа a совпадают.

В случае же чётного n, как уже отмечалось в пункте 5.2, существуют два корня степени n из положительного числа. Один из них: $\sqrt[n]{a}$ — положительный, т. е. арифметический корень степени n из a, а другой равен ему по абсолютной величине, но противоположен по знаку: $-\sqrt[n]{a}$. Корень степени n ($n \geqslant 2$) из нуля по определению есть арифметический корень степени n из нуля:

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Из вышеизложенного следует, что если существует арифметический корень степени n из числа a, то он единственный.

Подчеркнём, что:

1) если a — неотрицательное число, а n — любое натуральное число ($n \geqslant 2$), то запись $\sqrt[n]{a}$ означает арифметический корень степени n из числа a;

2) если a — отрицательное число и $n = 2m + 1$ ($m \in \boldsymbol{N}$) — нечётное число, то запись $\sqrt[2m+1]{a}$ означает корень степени $2m + 1$ из числа a, но этот корень не является арифметическим корнем;

3) если a — отрицательное число, а $n = 2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$) — чётное число, то запись $\sqrt[2m]{a}$ не имеет смысла.

Приведём примеры:

1) Записи

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{0}, \quad \sqrt[4]{5}, \quad \sqrt[5]{8} \text{ —}$$

записи арифметических корней.

2) Записи

$$-\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{-4}, \quad -\sqrt[4]{5}, \quad \sqrt[5]{-8} \text{ —}$$

записи корней, которые не являются арифметическими корнями.

3) Записи

$$\sqrt{-3}, \quad \sqrt[4]{-5}, \quad \sqrt[6]{-11}, \quad -\sqrt{-1}$$

не имеют смысла.

Теорема 1

Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \qquad (2)$$

Доказательство. Так как a — неотрицательное число, то $\sqrt[n]{a}$ по определению неотрицательное число, n-я степень которого есть a. Это и выражается равенством (1).

Так как $a \geqslant 0$ — неотрицательное число, то, как показано в пункте 4.1, $a^n \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{a^n}$ по определению неотрицательное число, n-я степень которого есть a^n. Таким числом является a, что и записано при помощи равенства (2). Другого неотрицательного числа, n-я степень которого равняется a^n, нет.

Теорема 1 доказана.

Приведём примеры:

$$(\sqrt[4]{2})^4 = 2, \quad (\sqrt[3]{7})^3 = 7, \quad (\sqrt[21]{1})^{21} = 1,$$
$$\sqrt[4]{3^4} = 3, \quad \sqrt[9]{100^9} = 100, \quad \sqrt[7]{0^7} = 0.$$

Теорема 2

Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a и b из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $a = b$.

Доказательство. Из равенства $a^n = b^n$, где a и b — неотрицательные числа, следует равенство $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n}$, так как арифметический корень степени n из неотрицательного числа единственный. Учитывая, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, и используя равенство (2), получаем, что

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ и } \sqrt[n]{b^n} = b.$$

Следовательно, $a = b$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3

Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a, b и c ($c \neq 0$) справедливы равенства

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad (3)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}. \qquad (4)$$

Доказательство. По свойству (1) имеем

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = a \cdot b,$$
$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Правые части этих равенств равны. Следовательно, равны и левые их части:

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n.$$

Так как числа $\sqrt[n]{a \cdot b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательны, то, применяя теорему 2, получаем, что справедливо равенство (3). Аналогично доказывается равенство (4).

Теорема 3 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3},$$
$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3},$$
$$\sqrt[4]{\frac{2}{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{3}, \quad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}.$$

Замечание. Если n — нечётное число, то теоремы 1, 2 и 3 справедливы для любых действительных чисел a, b и c $(c \neq 0)$.

Для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a}.$$

Действительно, применяя теорему 3, а затем теорему 1, получим

$$\sqrt[2m+1]{-a} = \sqrt[2m+1]{(-1)a} = \sqrt[2m+1]{-1}\,\sqrt[2m+1]{a} =$$
$$= (-1)\sqrt[2m+1]{a} = -\sqrt[2m+1]{a}.$$

Приведём примеры:

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3, \quad \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1,$$
$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2, \quad \sqrt[5]{-100\,000} = -\sqrt[5]{10^5} = -10.$$

Свойства корней степени n используют для вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня и при освобождении дроби от иррациональности в знаменателе.

Например:

1) $\sqrt[3]{-135} = -\sqrt[3]{135} = -\sqrt[3]{5 \cdot 3^3} = -\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$;

2) $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$.

Введение корней степени n $(n \geqslant 2)$ позволяет решать рациональные уравнения, которые раньше не могли быть решены. Например, корнем уравнения $x^7 = 2$ является число $\sqrt[7]{2}$, этот корень единственный. А уравнение $x^{10} = 3$ имеет два корня $\sqrt[10]{3}$ и $-\sqrt[10]{3}$.

Пример. Решим уравнение

$$x^{16} - 5x^8 + 6 = 0. \tag{5}$$

Введя новое неизвестное $t = x^8$, перепишем уравнение (5) в виде

$$t^2 - 5t + 6 = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. Следовательно, множество всех корней уравнения (5) совпадает с объединением множеств всех корней уравнений

$$x^8 = 2 \text{ и } x^8 = 3.$$

Первое из этих уравнений имеет два корня: $x_1 = \sqrt[8]{2}$, $x_2 = -\sqrt[8]{2}$, и второе имеет два корня: $x_3 = \sqrt[8]{3}$, $x_4 = -\sqrt[8]{3}$.

Следовательно, уравнение (5) имеет четыре корня: $\sqrt[8]{2}$, $-\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[8]{3}$, $-\sqrt[8]{3}$.

Ответ: $\sqrt[8]{2}$, $-\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[8]{3}$, $-\sqrt[8]{3}$.

277. а) Что называют арифметическим корнем степени n ($n \geqslant 2$) из числа a?
б) Для каких действительных чисел определён арифметический корень степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа?
в) Сколько существует арифметических корней степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа?
г) Верны ли для любого неотрицательного числа a и любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) равенства $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$?
д) Если $a^n = b^n$, то всегда ли $a = b$?

Верно ли равенство **(278—279)**:

278. а) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;
б) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, $a \geqslant 0$ и $b > 0$;
в) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, $a < 0$ и $b < 0$;
г) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, $a < 0$ и $b < 0$?

279. $\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a}$, где $m \in \boldsymbol{N}$, a — любое действительное число?

280. Является ли следующая запись записью арифметического корня:
а) $\sqrt[3]{-2}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^2}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^3}$?

281. Вычислите арифметические корни:
а) $\sqrt[3]{(-8)^2}$; б) $\sqrt[4]{10\,000}$; в) $\sqrt[5]{2 \cdot 16}$; г) $\sqrt[6]{9 \cdot 81}$.

Вычислите **(282—286)**:

282. а) $\sqrt[3]{1000} - \sqrt[4]{160\,000}$; б) $\sqrt[5]{3\,200\,000} + \sqrt[3]{8000}$;
в) $\sqrt[3]{0{,}008} + \sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}$.

283. а) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625}$; г) $\sqrt[4]{81 \cdot 16}$;
д) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; е) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; ж) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}$; з) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24}$.

284. а) $\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{500})$; б) $\sqrt[4]{5}\,(\sqrt[4]{2000} - \sqrt[4]{125})$;
в) $\sqrt[3]{0{,}81} \cdot \sqrt[3]{0{,}9}$; г) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{1250}$.

285. а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$;
в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[5]{-7} \cdot \sqrt[5]{49} \cdot \sqrt[5]{49}$.

286. а) $(\sqrt[3]{-2})^3 + (\sqrt[5]{8})^5$; б) $\sqrt[5]{-1} - \sqrt[3]{-8}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (287—289):

287. а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[5]{-64}$; в) $\sqrt[5]{-96}$; г) $\sqrt[3]{54}$.

288. а) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{250}{16}}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{64}{7}}$.

289. а) $\sqrt[4]{32}$; б) $\sqrt[4]{243}$; в) $\sqrt[4]{1296}$; г) $\sqrt[4]{50625}$.

290. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-4}}$; г) $\frac{5}{\sqrt[5]{-9}}$.

291. а) Запишите числа, арифметические корни пятой степени которых равны 2; 3; $\frac{1}{4}$; 0,2.

б) Запишите числа, арифметические корни четвёртой степени которых равны 2; 3; $\frac{1}{4}$; 0,2.

292. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; б) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$; в) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}$; г) $\sqrt[3]{669\frac{59}{64}}$.

293. Подберите число x, удовлетворяющее уравнению:

а) $\sqrt[3]{x} = 2$; б) $\sqrt[4]{x} = 2$; в) $\sqrt[6]{x} = 1$; г) $\sqrt[5]{x} = 1$.

294. Вычислите:

а) $\sqrt{(-2)^2}$; б) $\sqrt{(-5)^4}$; в) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

г) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$; д) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; е) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

295. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[5]{800}$; в) $\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{750} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{162}$;

г) $\sqrt[4]{80}$; д) $\sqrt[4]{405}$; е) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + \frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}$;

ж) $\sqrt[4]{81 \cdot (4-\sqrt{17})^4}$; з) $\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[6]{0{,}000064}$.

296[1]**.** Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{m^4}$; б) $\sqrt[4]{(-m)^4}$;

в) $\sqrt{(x-1)^2}$, если $x < 1$; г) $\sqrt{(1-x)^2}$, если $x \geqslant 1$.

297. Для каких чисел a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2a}$; б) $\sqrt[3]{a-1}$; в) $\sqrt[4]{-a}$; г) $\sqrt[5]{1-a}$?

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

298. Для каких чисел k справедливо равенство:
а) $\sqrt{(k-1)^2} = 1 - k$; б) $\sqrt{(1+k)^2} = -1 - k$?

299. Упростите выражение $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, если:
а) $x \geqslant -1$; б) $x < -1$.

300. Докажите, что значение выражения:
а) $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$; б) $\sqrt[4]{97 - 56\sqrt{3}} + \sqrt{3}$
является целым числом.

Решите уравнение **(301—302)**:

301. а) $x^4 = 15$; б) $x^3 = 26$; в) $x^5 = 31$;
г) $x^6 = 2$; д) $x^3 = -5$; е) $x^4 = -4$.

302. а) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; б) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$;
в) $x^8 + 5x^4 - 6 = 0$; г) $x^8 - 7x^4 - 8 = 0$;
д) $x^8 - 5x^4 + 4 = 0$; е) $x^8 + 7x^4 - 8 = 0$.

303. **Исследуем.** Укажите все значения a, для каждого из которых уравнение $x^4 = a$ имеет два корня; имеет единственный корень; не имеет корней.

5.4. Свойства корней степени n

Теорема 1

Для натуральных чисел m, n ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad (1)$$

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}, \quad (2)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, что, в силу того что $a \geqslant 0$, числа, стоящие в левых и правых частях (пока предполагаемых) равенств (1) — (3), неотрицательны.

Метод доказательства этих равенств основан на применении теоремы 2 п. 5.3, в силу которой если n-е степени неотрицательных чисел равны между собой, то и сами числа равны между собой.

Если возведём отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (1) в n-ю степень, то получим равные числа:

$$((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m, \quad (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m.$$

Следовательно, равенство (1) верно.

Если возведём отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (2) в степень mn, то получим равные числа:

$$\left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^{mn} = a^m, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m.$$

Следовательно, равенство (2) верно.

Если возведём отдельно левые и правые части предполагаемого равенства (3) в степень mn, то получим равные числа:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$$

Следовательно, равенство (3) верно.

Теорема 1 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81},$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}, \quad \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Замечание. Если m и n — нечётные числа, то теорема 1 справедлива для любых действительных чисел a, в том числе и отрицательных.

Теорема 2

Для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть a есть произвольное действительное число. Тогда

$$a^{2m} = |a|^{2m} \geqslant 0.$$

Поэтому в силу равенства (2) п. 5.3

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = \sqrt[2m]{|a|^{2m}} = |a|,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3, \quad \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5.$$

Для любого натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a.$$

Справедливость этого утверждения следует из замечания на с. 90.

Теорема 3

Пусть a — положительное число, p — целое число и n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Тогда справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p. \qquad (5)$$

Доказательство. Если p — натуральное число, то равенство (5) уже доказано (см. равенство (1)).

Если $p = 0$, то

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{1} = 1, \quad (\sqrt[n]{a})^p = 1.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

Если $p < 0$, то $p = -|p|$, где $|p|$ — натуральное число. Тогда, используя определение степени с отрицательным целым показателем и свойства арифметических корней степени n, получаем

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{|p|}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^{|p|}}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{|p|}} = (\sqrt[n]{a})^{-|p|} = (\sqrt[n]{a})^p.$$

Теорема 3 доказана.

Приведём примеры:

$$\sqrt[3]{27^{-4}} = (\sqrt[3]{27})^{-4} = 3^{-4}, \quad \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3.$$

304. Сформулируйте свойства корней степени n.

305. Верно ли равенство:

а) $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a$, где a — любое действительное число;

б) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$, где a — любое действительное число;

в) $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$, если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, p — целое число, a — положительное число?

Вычислите **(306—308)**:

306. а) $(\sqrt{3})^2$; б) $\sqrt[3]{8^2}$; в) $\sqrt[3]{125^2}$; г) $\sqrt[4]{81^3}$;
д) $\sqrt{49^3}$; е) $\sqrt[3]{27^2}$; ж) $\sqrt[4]{16^3}$; з) $\sqrt[5]{32^4}$.

307. а) $\sqrt[4]{9^2}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[6]{8^2}$; г) $\sqrt[6]{16^3}$;
д) $\sqrt[6]{27^2}$; е) $\sqrt[6]{81^3}$; ж) $\sqrt[200]{49^{100}}$; з) $\sqrt[300]{125^{100}}$.

308. а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[4]{160\,000}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0625}$;
д) $\sqrt[6]{729}$; е) $\sqrt[6]{64\,000\,000}$; ж) $\sqrt[6]{0{,}000729}$.

Например: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

309[1]**.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{80}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[3]{250}$; г) $\sqrt[3]{-648}$;

д) $\sqrt[5]{a^7b}$; е) $\sqrt[4]{16c^5d^6}$, если $c > 0$, $d > 0$;

ж) $\sqrt[4]{5x^4}$, если $x < 0$; з) $\sqrt[5]{3x^5y}$.

Например: $\sqrt[3]{16x^4y^6} = \sqrt[3]{2^4x^4y^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{(2xy^2)^3} \times$
$\times \sqrt[3]{2x} = 2xy^2\sqrt[3]{2x}$.

Упростите выражение (**310—311**).

310. а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$;

в) $5\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4b}$; г) $\sqrt[5]{a} \cdot 2\sqrt[5]{a^4}$.

311. а) $\sqrt[3]{2c^2} \cdot \sqrt[3]{4c}$; б) $\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$;

в) $\sqrt[11]{a} \cdot \sqrt[11]{b} \cdot \sqrt[11]{c}$; г) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{x}$.

Внесите множитель под знак корня (**312—313**):

312. а) $3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$; б) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; в) $5\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; г) $7\sqrt[5]{\frac{1}{b}}$.

313. а) $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; б) $c\sqrt[3]{\frac{x^2}{c}}$; в) $\frac{ay}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$; г) $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2x}{a^7}}$, где $b > 0$.

Упростите выражение (**314—317**):

314. а) $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[4]{m}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^4}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt[3]{a^2b^4}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{m^7n^5}}{\sqrt[4]{m^3n}}$.

315. а) $(\sqrt[3]{x})^2$; б) $(\sqrt[4]{m})^5$; в) $(\sqrt[5]{ab^4})^2$; г) $(\sqrt[3]{4x^3y^2})^2$.

316. а) $\sqrt[4]{a^2}$; б) $\sqrt[6]{a^3}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^2}$; г) $\sqrt[6]{a^4b^2}$.

317. а) $\sqrt[6]{27}$; б) $\sqrt[6]{16}$; в) $\sqrt[9]{64}$; г) $\sqrt[12]{81}$.

318. Запишите $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ как корень:

а) четвёртой степени; б) шестой степени;

в) десятой степени; г) шестнадцатой степени.

319. Запишите $\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ как корень:

а) восьмой степени; б) двенадцатой степени;

в) двадцать четвёртой степени; г) тридцатой степени.

320. Упростите числовое выражение:

а) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$;

г) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}$; д) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; е) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

321. Запишите в виде корней одной и той же степени три числа:
а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt[8]{50}$.

Упростите выражение **(322—326)**:

322. а) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$; б) $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$; в) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}$; г) $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[12]{y}$.

323. а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$; в) $\sqrt{\dfrac{m}{n}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{p}{q}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{q}{p}}$.

324. а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{10}}}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$.

325. а) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$; б) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; в) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; г) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$.

326. а) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^3y^6}{27a^{12}b^9}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^{16}b^{12}}{81x^{24}b^4}}$.

327. Используя свойства корней степени n, запишите число так, чтобы под знаком корня было целое число:
а) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$; в) $5\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$.

328. Упростите выражение:
а) $(\sqrt[4]{a} - 1)(\sqrt[4]{a} + 1)$; б) $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})$;
в) $(\sqrt[3]{m} - \sqrt[4]{m})(\sqrt[4]{m} + \sqrt[3]{m})$; г) $(\sqrt[4]{p} - \sqrt[3]{p^2})(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[4]{p})$.

5.5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$

Пусть n ($n \geqslant 2$) — натуральное число. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число y, равное арифметическому корню степени n из x. Иными словами, **на множестве неотрицательных чисел зададим функцию**

$$y = \sqrt[n]{x}. \qquad (1)$$

Таким образом, областью определения функции (1) является множество неотрицательных чисел: $x \geqslant 0$.

Отметим следующие *свойства* функции (1).

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.
2) Если $x > 0$, то $y > 0$.
3) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
5) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$.

Свойство 1 следует из того, что корень степени n из нуля равен нулю.

Свойство 2 следует из того, что арифметический корень степени n из положительного числа есть число положительное.

Докажем теперь свойство 3, т. е. докажем способом от противного, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$. Предположим, что найдутся числа x_1 и x_2, такие, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2, \text{ но } \sqrt[n]{x_1} \geqslant \sqrt[n]{x_2}.$$

Учитывая, что эти числа неотрицательные, получим, что

$$(\sqrt[n]{x_1})^n \geqslant (\sqrt[n]{x_2})^n,$$

т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит неравенствам $0 \leqslant x_1 < x_2$. Следовательно, наше предположение неверно, а верно свойство 3.

Если x стремится к плюс бесконечности, пробегая числа

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ \ldots,\ m^n,\ \ldots,$$

то $y = \sqrt[n]{x}$ пробегает числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ m,\ \ldots$$

и, очевидно, также стремится к плюс бесконечности. Для других значений x это свойство сохраняется.

Доказательство свойства 5 будет следовать из рассмотрения графика функции (1).

Перейдём к построению графика функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ в декартовой системе координат xOy.

Рассмотрим сначала степенную функцию

$$x = y^n \quad (y \geqslant 0) \tag{2}$$

и построим её график в той же системе координат xOy следующим образом.

Чтобы получить точку этого графика, соответствующую значению y_0 $(y_0 \geqslant 0)$, отметим на оси Oy точку, соответствующую числу y_0 (рис. 58), проведём через неё прямую, параллельную оси Ox, отметим на оси Ox точку, соответствующую числу x_0 $(x_0 = y_0^n)$, проведём через неё прямую, параллельную оси Oy. Точка A пересечения этих прямых будет иметь координаты $(x_0; y_0)$, она является точкой графика функции (2), соответствующей значению y_0.

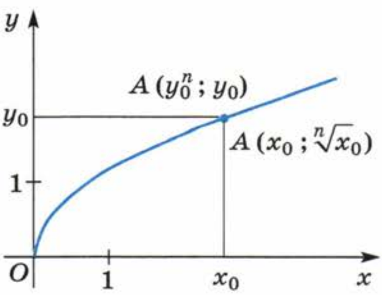


Рис. 58

Совокупность точек $A(y^n; y)$, соответствующих любым неотрицательным y, есть график функции $x = y^n$ $(y \geqslant 0)$.

Но так как для $y \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ равенства $x = y^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ выражают одну и ту же зависимость между x и y, то координаты любой точки A можно записать в виде $A(x; \sqrt[n]{x})$.

Это показывает, что A — точка графика функции (1) — одновременно является и точкой графика функции (2).

Но верно и обратное: если A — точка графика функции (2), то она является и точкой графика функции (1).

Итак, график функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ есть часть графика функции $x = y^n$ для $y \geqslant 0$.

Легко видеть, что график функции (1) отражает свойства 1—5 функции (1).

Действительно, график функции (1) проходит через начало координат — свойство 1; график функции (1) расположен выше оси Ox для $x > 0$ — свойство 2; график изображает возрастающую функцию — свойство 3; при $x \to +\infty$ ординаты соответствующих точек графика функции неограниченно возрастают — свойство 4; график функции (1) есть непрерывная кривая — свойство 5.

Приведём ещё некоторые *свойства* арифметических корней.

6) Если $x > 1$, то $\sqrt[n]{x} > 1$.

7) Если $0 < x < 1$, то $0 < \sqrt[n]{x} < 1$.

Справедливость свойства 7 следует из того, что

$$\sqrt[n]{0} = 0, \quad \sqrt[n]{1} = 1,$$

и того, что функция

$$y = \sqrt[n]{x} \ (x \geqslant 0)$$

возрастает.

8) Если $0 < x < 1$, то

$$x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \ldots . \qquad (3)$$

Например, для этих x очевидно, что

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 < x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда и получаем, что $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (3).

В силу неравенств (3) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(0; 1)$ расположен выше графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен выше графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

9) Если $x > 1$, то

$$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \ldots . \qquad (4)$$

Например, для этих x очевидно, что

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 > x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда получаем, что $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (4).

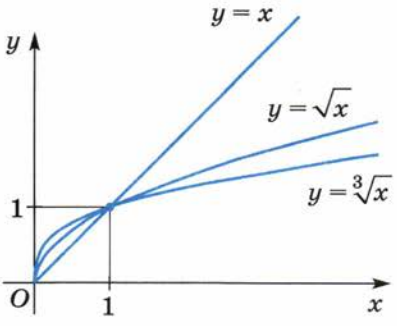


Рис. 59

В силу неравенств (4) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(1; +\infty)$ расположен ниже графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

На рисунке 59 в одной и той же декартовой системе координат xOy изображены графики функций $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ для неотрицательных чисел x.

329. а) Какова область значений функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$?
б) Каковы свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$?

330. Используя график функции

$$y = x^3 \ (x \geqslant 0),$$

определите приближённо $\sqrt[3]{y}$ для следующих значений y:
а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8;
б) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5.

Постройте график функции **(331—332)**:

331. а) $x = 2y$; б) $x = -5y$; в) $x = y^2$; г) $x = y^3$;
д) $x = 2y - 4$; е) $x = y + 5$; ж) $x = 2y^2$; з) $x = 5y^3$
для $y \geqslant 0$.

332. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[4]{x}$; в) $y = \sqrt[5]{x}$; г) $y = \sqrt[6]{x}$
для $x \geqslant 0$.

333. Используя графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[4]{x}$, сравните значения функций (единичные отрезки по 3 см):
а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$;
в) $\sqrt[3]{0,5}$ и $\sqrt[4]{0,5}$; г) $\sqrt[3]{0,3}$ и $\sqrt[4]{0,3}$.

334. Известно, что:
а) $\sqrt[3]{a} > 1$; б) $\sqrt[3]{a} < 1$.
Верно ли, что a больше единицы? больше нуля?

335. Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x}$. С помощью графика найдите:
а) при каких x справедливо неравенство $\sqrt[4]{x} > 1$;
б) при каких x справедливо неравенство $\sqrt[4]{x} < 1$.

336. Используя график функции $y = \sqrt[3]{x}$, покажите, что:

а) $\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{0,5} > \sqrt[3]{0,2}$; г) $\sqrt[3]{0,9} > \sqrt[3]{0,4}$.

337. Доказываем. Докажите неравенство:

а) $\sqrt[3]{10} > 2$; б) $3 < \sqrt[4]{100}$; в) $\sqrt{7} > \sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[4]{81} < \sqrt{10}$;
д) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$; е) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{4}$; ж) $\sqrt[5]{2} < \sqrt{5}$; з) $\sqrt{7} > \sqrt[4]{20}$.

338. Сравните числа:

а) 2 и $\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{12}$ и 2; в) $\sqrt[3]{3}$ и 1,5; г) $\sqrt[4]{75}$ и 3.

339. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[4]{3}$.

340. Сравните натуральные числа m $(m \geqslant 2)$ и n $(n \geqslant 2)$, если:

а) $\sqrt[m]{5} > \sqrt[n]{5}$; б) $\sqrt[m]{8} < \sqrt[n]{8}$; в) $\sqrt[m]{0,2} > \sqrt[n]{0,2}$; г) $\sqrt[m]{0,3} < \sqrt[n]{0,3}$.

341. Сравните с единицей положительное число a, если:

а) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$; б) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$; в) $\sqrt[5]{a} > \sqrt[4]{a}$; г) $\sqrt[6]{a} < \sqrt[5]{a}$.

342. Каким может быть натуральное число n $(n \geqslant 2)$, если:

а) $\sqrt[n]{16} \leqslant 4$; б) $\sqrt[n]{16} > 4$?

343. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{3x}$; б) $y = \sqrt[3]{-5x}$; в) $y = \sqrt[4]{2x-1}$; г) $y = \sqrt[5]{4-5x}$.

344. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{-x}$;
г) $y = -\sqrt{-x}$; д) $y = \sqrt{|x|}$; е) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$;
ж) $y = \sqrt[3]{|x|}$; з) $y = \sqrt[4]{x}$; и) $y = \sqrt[4]{-x}$;
к) $y = \sqrt[4]{|x|}$.

5.6*. Корень степени n из натурального числа

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Очевидно, что n-я степень натурального числа b есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть n-я степень некоторого натурального числа.

Например, среди натуральных чисел, не больших 100, только четыре, т. е. 4%, являются кубами натуральных чисел, а именно

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3.$$

Среди натуральных чисел, не больших 1000, только 10, т. е. 1%, являются кубами натуральных чисел, а именно

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ 10^3.$$

Мы видим, что среди больших натуральных чисел редко встречаются степени натуральных чисел.

Отметим следующий факт:

арифметический корень степени n ($n \geqslant 2$) из натурального числа может быть или натуральным числом, или иррациональным числом.

Например, корни $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[6]{19}$ — иррациональные числа, а корни $\sqrt{2^2}$, $\sqrt[3]{5^6}$, $\sqrt[4]{7^{12}}$ — натуральные числа.

Конечно, это утверждение при любом $n \geqslant 2$ надо доказывать, но мы доказательство опускаем.

Если данное натуральное число не есть n-я степень ($n \geqslant 2$) натурального числа, то нет рационального числа, равного корню степени n из этого числа; говорят, что из этого числа корень степени n точно не извлекается. Покажем, как найти рациональное число, приближённо равное корню степени n из натурального числа, не являющегося n-й степенью натурального числа, т. е. как можно приближённо извлечь корень степени n из натурального числа.

Ограничимся примером.

Вычислим приближённо с точностью до второго знака после запятой число $\sqrt[3]{17}$.

Мы знаем, что это число положительное. Оно имеет некоторое десятичное разложение:

$$\sqrt[3]{17} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots .$$

Вычислить приближённо с точностью до второго знака после запятой (с недостатком) число $\sqrt[3]{17}$ — это значит вычислить точно числа α_0, α_1, α_2.

Рассмотрим числа 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ..., чтобы найти среди них два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Очевидно,

$$8 = 2^3 < 17 < 3^3 = 27.$$

Следовательно, в силу возрастания функции $y = \sqrt[3]{x}$

$$2 < \sqrt[3]{17} < 3,$$

и поэтому $\alpha_0 = 2$.

Теперь рассмотрим числа 2^3; $2{,}1^3$; $2{,}2^3$; $2{,}3^3$; $2{,}4^3$; ...; $2{,}9^3$; 3^3; найдём среди них два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Имеем

$$15{,}625 = 2{,}5^3 < 17 < 2{,}6^3 = 17{,}576,$$

откуда в силу возрастания функции $y = \sqrt[3]{x}$

$$2{,}5 < \sqrt[3]{17} < 2{,}6,$$

и, следовательно, $\alpha_1 = 5$.

Теперь рассмотрим с той же целью числа

$$2{,}5^3;\ 2{,}51^3;\ 2{,}52^3;\ \ldots;\ 2{,}59^3;\ 2{,}6^3.$$

Оказывается, что

$$16{,}974\ldots = 2{,}57^3 < 17 < 2{,}58^3 = 17{,}173\ldots,$$

следовательно, $\alpha_2 = 7$.

Итак, $\sqrt[3]{17} = 2{,}57\ldots$.

Как видно, использованный метод вычисления простой, но громоздкий.

Электронные калькуляторы эти вычисления производят мгновенно. Точность результата определяется техническими возможностями данного калькулятора.

Приближённые значения квадратных и кубических корней из чисел также можно получить, используя соответствующие таблицы.

345. Может ли быть рациональным числом корень степени n ($n \geqslant 2$):

а) из простого числа; б) из натурального числа?

346. Что значит вычислить с точностью до третьего знака после запятой (с недостатком) $\sqrt[3]{N}$, где N — простое число?

347. Если натуральное число N не есть куб натурального числа, то является ли число $\sqrt[3]{N}$ иррациональным?

348. Имеются ли среди натуральных чисел от 100 до 200 четвёртые степени каких-либо натуральных чисел?

349. Является ли кубом натурального числа число:

а) 0; б) 1; в) –8; г) 1000?

Доказываем (350—351).

350. Докажите, что не существует рационального числа, куб которого равен:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

351. Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{n}$, где n — простое число.

352. Является ли рациональным число:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{5}$; г) $\sqrt[4]{64}$?

353. Для каждого из чисел 7; 10 найдите:

а) наибольшее натуральное число, куб которого меньше данного числа;

б) наименьшее натуральное число, куб которого больше данного числа;

в) наибольшее натуральное число, четвёртая степень которого меньше данного числа;
г) наименьшее натуральное число, четвёртая степень которого больше данного числа.

354. Найдите приближённое значение кубического корня с точностью до 0,1 из следующих чисел:
а) 3; б) 6; в) 8; г) 10.

355. Вычислите с точностью до 1:
а) $\sqrt[3]{175}$; б) $\sqrt[3]{241}$; в) $\sqrt[4]{105}$; г) $\sqrt[4]{273}$.

356. Проверьте справедливость неравенств:
а) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$; б) $7 < \sqrt[3]{350} < 8$;
в) $5{,}1 < \sqrt[3]{135} < 5{,}2$; г) $3{,}5 < \sqrt[3]{45} < 3{,}6$.

357. Какое число является лучшим приближением $\sqrt[3]{96}$:
а) 4 или 5; б) 4,5 или 4,6?

358. Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:
а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$.

359. Вычислите с точностью до первого знака после запятой:
а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[5]{7}$; в) $\sqrt[5]{8}$.

5.7*. Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называют **иррациональным уравнением.**

Например, уравнение $\sqrt{x+5} = x - 1$ является иррациональным, а уравнение $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ не является.

Для решения иррациональных уравнений часто применяют переход к уравнению-следствию. В 8 классе уже говорилось об уравнениях-следствиях. Напомним определение.

Если любой корень уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{1}$$

является корнем уравнения

$$f_2(x) = g_2(x), \tag{2}$$

то уравнение (2) называют **следствием** уравнения (1).

Из этого определения следует, что все корни исходного уравнения являются корнями уравнения-следствия. Однако не каждый корень уравнения-следствия является корнем исходного уравнения.

Например, для уравнения

$$-x = \sqrt{x} \tag{3}$$

уравнение
$$x^2 = x \qquad (4)$$
является его следствием, так как единственный корень 0 уравнения (3) является корнем уравнения (4). Но уравнение-следствие (4) имеет ещё один корень 1, который не является корнем исходного уравнения (3).

Итак, при переходе от исходного уравнения к уравнению-следствию возможно появление корней, не являющихся корнями исходного уравнения. Эти корни называют **посторонними корнями** для исходного уравнения. Корень 1 уравнения (4) — посторонний для уравнения (3).

Если при решении уравнения был выполнен переход к уравнению-следствию, то необходимо проверить, каждый ли корень уравнения-следствия является корнем исходного уравнения.

Замену уравнения $f(x) = g(x)$ уравнением $f^k(x) = g^k(x)$ ($k \in N$, $k \geqslant 2$) называют **возведением уравнения $f(x) = g(x)$ в степень k.**

Следствием уравнения
$$f(x) = g(x)$$
является уравнение
$$f^{2m}(x) = g^{2m}(x),$$
где $2m$ — фиксированное чётное натуральное число, следовательно,

при возведении уравнения в чётную степень получается уравнение-следствие исходного уравнения.

Пример 1. Решим уравнение
$$x - 2 = \sqrt{3x - 2}. \qquad (5)$$
Возведя в квадрат уравнение (5), получим уравнение
$$(x - 2)^2 = 3x - 2, \qquad (6)$$
являющееся следствием уравнения (5). Уравнение (6) имеет два корня $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$.

Проверим, являются ли числа x_1 и x_2 корнями уравнения (5).

Так как $x_1 - 2 = 6 - 2 = 4$ и $\sqrt{3x_1 - 2} = \sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 4$, то число x_1 является корнем уравнения (5).

Так как $x_2 - 2 = 1 - 2 = -1$, а $\sqrt{3x_2 - 2} = \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1$ и $1 \neq -1$, то число x_2 не является корнем уравнения (5).

Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень 6.

Ответ: 6.

Пример 2. Решим уравнение
$$\sqrt[4]{x + 3} = \sqrt{x + 1}. \qquad (7)$$

Возведя в четвёртую степень уравнение (7), получим уравнение

$$x + 3 = (x + 1)^2, \tag{8}$$

являющееся следствием уравнения (7). Уравнение (8) имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (7), так как $\sqrt[4]{x_1 + 3} = \sqrt[4]{1+3} = \sqrt{2}$ и $\sqrt{x_1 + 1} = \sqrt{2}$. Для $x_2 = -2$ правая часть уравнения (7) не имеет смысла, т. е. число $x_2 = -2$ не является корнем уравнения (7).

Следовательно, уравнение (7) имеет единственный корень 1.

Ответ: 1.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{3x+16}. \tag{9}$$

Возведя в квадрат уравнение (9), получим уравнение

$$x + 1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+6} + x + 6 = 3x + 16, \tag{10}$$

являющееся следствием уравнения (9). Перенеся в правую часть все слагаемые, кроме корней, и приведя подобные члены, перепишем уравнение (10) в виде

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+6} = x + 9. \tag{11}$$

Возведя в квадрат уравнение (11), получим уравнение

$$4(x + 1)(x + 6) = (x + 9)^2, \tag{12}$$

являющееся следствием уравнения (11), а значит, и уравнения (9).

Уравнение (12) имеет два корня $x_1 = -6\frac{1}{3}$ и $x_2 = 3$.

Проверка показывает, что число x_2 является корнем уравнения (9), а число x_1 нет.

Следовательно, уравнение (9) имеет единственный корень 3.

Ответ: 3.

Иррациональные уравнения могут содержать неизвестное под знаком корня нечётной степени. Для их решения применяют следующее утверждение.

Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^{2m+1}(x) = g^{2m+1}(x)$, где $2m + 1$ — фиксированное нечётное натуральное число, равносильны, следовательно,

> **при возведении уравнения в нечётную степень получается уравнение, равносильное исходному уравнению.**

Пример 4. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{7x+1} = x + 1. \tag{13}$$

Возведя в третью степень уравнение (13), получим уравнение

$$7x + 1 = (x + 1)^3, \tag{14}$$

равносильное уравнению (13). Уравнение (14) имеет три корня $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -4$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (13) имеет те же корни.

Ответ: -4; 0; 1.

Пример 5. Решим уравнение

$$\sqrt[7]{x^2 + 2x + 3} = \sqrt[7]{2x^2 + 3x + 1}. \qquad (15)$$

Возведя в седьмую степень уравнение (15), получим уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = 2x^2 + 3x + 1, \qquad (16)$$

равносильное уравнению (15). Уравнение (16) имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (15) имеет те же корни.

Ответ: -2; 1.

Иногда иррациональное уравнение можно решить, применяя замену неизвестного.

Пример 6. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{2x^2 + 4x + 18} = 7. \qquad (17)$$

Введя новое неизвестное $t = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$, перепишем уравнение (17) в виде

$$\sqrt{2t^2 - 2} = 7 - t. \qquad (18)$$

Возведя уравнение (18) в квадрат, получим уравнение

$$2t^2 - 2 = 49 - 14t + t^2, \qquad (19)$$

являющееся следствием уравнения (18).

Уравнение (19) имеет два корня $t_1 = -17$ и $t_2 = 3$. Проверка показывает, что оба эти числа являются корнями уравнения (18). Следовательно, множество корней уравнения (17) есть объединение множеств корней двух уравнений

$$1)\ \sqrt{x^2 + 2x + 10} = -17 \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{x^2 + 2x + 10} = 3.$$

Уравнение 1 не имеет корней, так как его левая часть неотрицательна для любых x, а правая часть отрицательна.

Решив уравнение 2, получим, что оно имеет единственный корень $x_1 = -1$.

Следовательно, уравнение (17) имеет единственный корень -1.

Ответ: -1.

Иногда встречаются уравнения вида

$$f(x) \cdot g(x) = 0, \qquad (20)$$

где хотя бы одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ содержит неизвестное под знаком корня. Обычно уравнения вида (20) решают так:

1. Решают уравнение $f(x) = 0$ и отбирают из его корней те, для каждого из которых имеет смысл функция $g(x)$.

2. Решают уравнение $g(x) = 0$ и отбирают из его корней те, для каждого из которых имеет смысл функция $f(x)$.

3. Объединяют найденные корни, они и составляют множество всех корней уравнения (20).

Пример 7. Решим уравнение

$$(x^2 - 4)(\sqrt{x-1} - 2) = 0. \qquad (21)$$

Сначала решим уравнение

$$x^2 - 4 = 0.$$

Оно имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Так как выражение $\sqrt{x_1 - 1} - 2$ имеет смысл, то число x_1 — корень уравнения (21).

Так как выражение $\sqrt{x_2 - 1} - 2$ не имеет смысла, то число x_2 не является корнем уравнения (21).

Теперь решим уравнение

$$\sqrt{x-1} - 2 = 0.$$

Оно имеет единственный корень $x_3 = 5$.

Так как выражение $x_3^2 - 4$ имеет смысл, то число x_3 — корень уравнения (21).

Итак, уравнение (21) имеет два корня x_1 и x_3.

Ответ: 2; 5.

360. Является ли иррациональным уравнение:

а) $\sqrt{2x+5} = \sqrt[3]{7x-5}$; б) $\sqrt{5x-4} = x$;

в) $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$; г) $x^2 - (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5} = 0$?

361. Подберите число x, удовлетворяющее равенству:

а) $\sqrt[3]{x+5} = 2$; б) $\sqrt[4]{x+79} = 3$; в) $2\sqrt[4]{x} = 3$; г) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x} = 5$.

Решите уравнение **(362—368)**:

362. а) $\sqrt{5x+11} = x+1$; б) $\sqrt{4x+13} = x-8$;

в) $\sqrt{3x+13} = x+3$; г) $\sqrt{2x+19} = x+2$.

363. а) $\sqrt{3x-7} = \sqrt{2x-5}$; б) $\sqrt{5x-9} = \sqrt{2x+3}$;

в) $\sqrt{15x+14} = \sqrt{14x+13}$; г) $\sqrt{15x-14} = \sqrt{14x-13}$;

д) $\sqrt[4]{2x+1} = \sqrt{2x-1}$; е) $\sqrt[4]{2x-1} = \sqrt{2x-3}$.

364. а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+7}$; б) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1}$;

в) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+4} = \sqrt{6x+10}$; г) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{6x+4}$.

365. а) $\sqrt{x+1} = x-1$; б) $\sqrt{x-1} = x-3$;

в) $\sqrt{3x+1} = |2x-1|$; г) $\sqrt{7x-3} = |6x-4|$;

д) $\sqrt[3]{x-1} = x-1$; е) $\sqrt[3]{4x+8} = x+2$;

ж) $\sqrt[3]{5x-3} = \sqrt[3]{3x-5}$; з) $\sqrt[5]{7x+4} = \sqrt[5]{5x-2}$;

и) $\sqrt[7]{x^2+5x-5} = \sqrt[7]{2x^2-x}$; к) $\sqrt[9]{x^2-8x+6} = \sqrt[9]{3x^2-4x}$.

366. а) $\sqrt{x^2+2x+10} + \sqrt{x^2+2x+17} = 7$;

б) $\sqrt{x^2+6x+10} + \sqrt{x^2+6x+13} = 3$;

в) $\sqrt{x^2+3x-1} + \sqrt{2x^2+6x-4} = 7$;

г) $\sqrt{x^2-5x-23} + \sqrt{2x^2-10x-32} = 5$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+10}} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2-6x+13}} = 2$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8x+18}} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2-8x+24}} = \sqrt{2}$.

367. а) $(x^2-4)(\sqrt{x+1}-2) = 0$;

б) $(x^2-16)(\sqrt{x+3}-1) = 0$;

в) $(x^2-x-6)(\sqrt{x+1}-3) = 0$;

г) $(x^2+2x-15)(\sqrt{x+4}-1) = 0$;

д) $\left(\sqrt[6]{2x^2-7} + \sqrt[3]{x-3}\right)\left(\sqrt[4]{x^2-2x-2}-1\right) = 0$.

368. а) $\sqrt{\dfrac{13x+3}{x+3}} + 25\sqrt{\dfrac{x+3}{13x+3}} - 10 = 0$;

б) $\sqrt{\dfrac{11x-14}{x+1}} + 36\sqrt{\dfrac{x+1}{11x-14}} - 12 = 0$.

Дополнения к главе 2

1. Понятие степени с рациональным показателем

Ранее уже было введено и изучено понятие степени числа a ($a \neq 0$) с целым показателем p, т. е. a^p, где показатель p — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Теперь определим степень числа с рациональным показателем, т. е. с показателем $\dfrac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число, $q \geqslant 2$.

Пусть a — положительное число, а $\frac{p}{q}$ — рациональное число ($q \geqslant 2$). По определению a в степени $\frac{p}{q}$ равно арифметическому корню степени q из a в степени p, т. е.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Например:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2},\ 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3},\ 7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7},\ 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}.$$

Теорема

Пусть a — положительное число, p — целое число, k и q — натуральные числа, $q \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. Тогда справедливы равенства

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p, \tag{1}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}, \tag{2}$$

$$a^p = a^{\frac{pq}{q}}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Применяя теорему 3 п. 5.4, имеем

$$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Опять используя определение степени с рациональным показателем, получим, что

$$(\sqrt[q]{a})^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Из этих равенств вытекает равенство (1).

Докажем теперь равенство (2). По определению степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{4}$$

С другой стороны, в силу того же определения и свойств корней степени q имеем

$$a^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[qk]{(a^p)^k} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{5}$$

Так как правые части равенств (4) и (5) равны, то равны и левые части, тем самым доказано равенство (2).

Применяя определение степени с рациональным показателем и свойства корней степени n, получим, что

$$a^{\frac{pq}{q}} = \sqrt[q]{a^{pq}} = \sqrt[q]{(a^p)^q} = a^p.$$

Тем самым доказано равенство (3).

Теорема доказана.

Приведём примеры:

$$27^{-\frac{4}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = 3^{-4}, \quad 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{3}{9}}, \quad 2^{-3} = 2^{-\frac{12}{4}}, \quad 5^{-3} = 5^{-\frac{6}{2}}.$$

Замечание 1. Если k и q — натуральные числа, а p — целое число, то справедливо равенство $\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$. Поэтому если $r = \frac{p}{q}$, то $r = \frac{pk}{qk}$ для любого натурального k. Равенство (2) показывает, что определение степени с рациональным показателем a^r не зависит от формы записи числа r, а зависит лишь от самого числа r. При любой форме записи данного рационального числа r определение a^r приводит к одному и тому же числу. Если бы это было не так, то определение степени с рациональным показателем было бы противоречиво.

Замечание 2. Равенство (3) показывает, что определение степени с рациональным показателем содержит в себе определение степени с целым показателем.

Замечание 3. Если $\frac{p}{q} > 0$, то естественно считать, что $0^{\frac{p}{q}} = 0$, если же $\frac{p}{q} \leqslant 0$, то запись $0^{\frac{p}{q}}$ не имеет смысла.

369. а) Что понимается под степенью с рациональным показателем $\frac{p}{q}$ $(q \geqslant 2)$ положительного числа a?

б) Сформулируйте теорему, доказанную в этом пункте.

в) Почему в определении степени с рациональным показателем нет противоречия?

Запишите в виде степени с рациональным показателем[1] **(370—372)**:

370. а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{0,1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2,5}$;

в) $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{3^5}$, $\sqrt[6]{7^5}$, $\sqrt{3^7}$, $\sqrt[5]{2^3}$.

371. а) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3x}$, $\sqrt[4]{5x^3}$, $\sqrt{2xy^3}$, $\sqrt[5]{8a^2b^3}$.

372. а) $\sqrt{a-1}$; б) $\sqrt[3]{m+n}$; в) $\sqrt[3]{(x+1)^2}$; г) $\sqrt[5]{(x-4)^3}$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

Запишите в виде корней (**373—374**):

373. а) $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{1}{4}}$, $(ac)^{\frac{1}{7}}$; б) $(x+1)^{\frac{1}{2}}$, $(a-b)^{\frac{7}{4}}$, $(m+3)^{\frac{1}{4}}$;
в) $3^{\frac{2}{3}}$, $4^{\frac{3}{5}}$, $6^{\frac{2}{3}}$, $7^{\frac{5}{9}}$, $10^{0,6}$; г) $a^{1\frac{2}{3}}$, $c^{1,4}$, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{n}{2}}$, $y^{\frac{m}{n}}$,
где n и m — натуральные числа и $n \geqslant 2$.

374. а) $a^{-0,5}$, $b^{-\frac{2}{3}}$, $c^{-2,5}$; б) $(a^2-b)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-2y)^{-\frac{2}{5}}$, $(x-a^2)^{-\frac{1}{n}}$,
где n — натуральное число, $n \geqslant 2$.

Вычислите (**375—376**):

375. а) $25^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $16^{0,25}$; б) $25^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $16^{1,25}$; в) $25^{-1,5}$, $27^{-\frac{2}{3}}$, $16^{-0,75}$.

376. а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{49}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $(0,01)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6,25)^{-0,5}$.

377. Объясните, почему для любого числа $a \geqslant 0$ верно равенство:
а) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a$; б) $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a$; в) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$; г) $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a$.

378. **Исследуем.** При каких значениях a уравнение $(ax)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$:
а) имеет единственный корень;
б) имеет бесконечное множество корней;
в) не имеет корней?

2. Свойства степени с рациональным показателем

Теорема 1

Положительное число a в степени с любым рациональным показателем r положительно:

$$a^r > 0. \quad (1)$$

Доказательство. Запишем число r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое (положительное, отрицательное или нуль).

Так как a — положительное число, то, используя определение степени с рациональным показателем и свойства корня степени q, получим, что

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 0,$$

т. е. верно неравенство (1) при $p = 1$.

Используя свойства степени положительного числа с целым показателем, имеем при любом целом p

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 0,$$

т. е. неравенство (1) доказано.

Теорема 2

Пусть a — положительное число, а r_1, r_2 и r — рациональные числа. Тогда справедливы свойства:

1. При умножении степеней с рациональным показателем одного и того же положительного числа показатели степеней складывают:
$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}. \qquad (2)$$
2. Число a в степени $(-r)$ равно единице, делённой на a в степени r:
$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \qquad (3)$$
3. При делении степеней с рациональными показателями одного и того же положительного числа показатели степеней вычитают:
$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}. \qquad (4)$$
4. При возведении степени с рациональным показателем положительного числа в рациональную степень показатели степеней перемножают:
$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{k}{n},$$

где m и k — целые числа, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Используя определение степени с рациональным показателем, свойства арифметических корней и свойства степеней с целым показателем, получим

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$$
$$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{r_1 + r_2},$$

т. е. равенство (2) доказано.

Теперь на основании свойства 1 имеем

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1,$$

откуда и следует равенство (3).

Далее, в силу свойств 1 и 2

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{-r_2} = a^{r_1 + (-r_2)} = a^{r_1 - r_2},$$

и равенство (4) тем самым доказано.

Теперь докажем равенство (5).

Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \text{ и } r_2 = \frac{k}{l},$$

где m и k — целые числа, n и l — натуральные числа, $n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$. Используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, имеем

$$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k} = \sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[nl]{a^{mk}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot l}} = a^{r_1 \cdot r_2},$$

и равенство (5) доказано.

Теорема 2 доказана.

Приведём примеры:

$$2^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3},$$

$$\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 3^{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4)} = 3^2 = 9.$$

Теорема 3

Пусть a и b — положительные числа, а r — рациональное число. Тогда справедливы свойства:

1. Степень с рациональным показателем произведения положительных чисел равна произведению тех же степеней сомножителей:
$$(ab)^r = a^r \cdot b^r. \tag{6}$$
2. Степень с рациональным показателем частного положительных чисел равна частному тех же степеней делимого и делителя:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{p}{q}$, где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое число. Тогда, используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, получаем, что

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot b^r,$$

и равенство (6) доказано.

Аналогично доказывается равенство (7).
Теорема 3 доказана.
Приведём примеры:

$$(0{,}125)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = (0{,}125 \cdot 8)^{-\frac{2}{3}} = 1^{-\frac{2}{3}} = 1,$$

$$(4{,}4)^{\frac{1}{3}} : (0{,}55)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4{,}4}{0{,}55}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

379. Может ли быть отрицательным числом степень с рациональным показателем положительного числа?

380. По какому правилу: а) умножают; б) делят степени с рациональным показателем одного и того же положительного числа?

381. По какому правилу возводят в степень с рациональным показателем степень положительного числа?

382. Чему равна степень с рациональным показателем:
а) произведения положительных чисел;
б) частного положительных чисел?

383. Запишите выражение в виде произведения степеней с рациональным показателем:

а) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[3]{2^2}}$; б) $\sqrt{7^3} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{6^2}}{\sqrt[6]{5^5}}$;

в) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{2} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[3]{3}}$; г) $\sqrt{8^3} \cdot \sqrt[5]{7^3} : \dfrac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[5]{49^2}}$.

384. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$; б) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{9}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$;

в) $(3^{1,5} - 2^{1,5})(3^{1,5} + 2^{1,5})$; г) $(2^{2,5} - 3^{1,5})(2^{2,5} + 3^{1,5})$;

д) $\left(5^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{2}{3}}\right)$;

е) $\left(\left(3^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\right)\left(9^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} + 49^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{3}{4}}$.

Упростите выражение[1] **(385—391)**:

385. а) $x^{0,5} \cdot x^{0,25}$; б) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$; в) $x^{\frac{5}{8}} \cdot x^{-0,5}$; г) $b \cdot b^{-1\frac{2}{3}}$.

386. а) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a$; б) $a^{\frac{3}{8}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}$; в) $y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{5}{6}}$.

387. а) $125^{1,5} \cdot 25^{-\frac{3}{4}}$; б) $2^{1,25} \cdot 16^{\frac{1}{16}}$; в) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$; г) $\sqrt[3]{x} \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

388. а) $a^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{a}$; б) $z^{\frac{2}{3}} : \sqrt[5]{z^2}$; в) $\sqrt[4]{m} : m^{-\frac{1}{2}}$; г) $\sqrt[3]{a} : a^{-\frac{1}{6}}$.

389. а) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} \cdot a^{-\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{-\frac{3}{16}}$.

390. а) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$; б) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^6$; в) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; г) $\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{20}}$.

391. а) $\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}y\right)^{-1}$; в) $\left(3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; г) $\left(2x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

392. Вычислите:

а) $\left(9^{-\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{9^{-1}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)$;

б) $\left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{81^{-1}}\right) \cdot \left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} - 81^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Упростите выражение (**393—394**):

393. а) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}} + 3\right)\left(m^{\frac{1}{2}} - 3\right)$.

394. а) $\left(2x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(3m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right)\left(n^{\frac{1}{4}} + 3m^{\frac{1}{4}}\right)$;

в) $\left(x^{\frac{1}{6}} - 5\right)\left(x^{\frac{1}{6}} + 5\right)$; г) $\left(3^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

Разложите на множители (**395—396**):

395. а) $a - 1$; б) $b - 3$; в) $x - y$; г) $5 - m$.

396. а) $4a - b^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; в) $x^3 - \sqrt{y}$; г) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Например:

$$\sqrt{a} - b = a^{\frac{1}{2}} - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right).$$

Представьте в виде суммы (**397—399**):

397. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + \sqrt{b}\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}} - y\right)^2$; в) $\left(m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; г) $\left(c^{\frac{1}{6}} - d^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

398. а) $\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)$; б) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

399. а) $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^3$; б) $\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{2}{3}}\right)^3$; в) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

Сократите дробь (**400—401**):

400. а) $\dfrac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 2}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + x}{3x^{\frac{1}{2}} + 3}$; в) $\dfrac{(ab)^{\frac{1}{2}} - a}{\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2x}}{(2xy)^{\frac{1}{2}} + 2x}$.

401. а) $\dfrac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - y}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{y}}$; г) $\dfrac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$.

Упростите выражение **(402—403)**:

402. а) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}$.

403. а) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$;

б) $\left(x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{6}}\left(y^{-\frac{5}{6}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}$;

в) $\left(\dfrac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{2}$.

Сравните числа **(404—406)**:

404. а) $15^{\frac{1}{4}}$ и $3{,}9^{\frac{1}{2}}$; б) $2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ и $3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$;

в) $3\cdot 4^{\frac{1}{3}}$ и $4\cdot 2^{\frac{1}{3}}$; г) $\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$ и $\left(3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

405. а) $8^{\frac{3}{2}}$ и $12^{\frac{3}{4}}$; б) $\sqrt[3]{12}$ и $\sqrt{5}$; в) $12^{\frac{3}{2}}$ и $18^{\frac{2}{3}}$; г) $64^{\frac{4}{3}}$ и $36^{\frac{3}{2}}$.

406. а) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{5}{8}}$ и $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$; б) $\dfrac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ и $\dfrac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$ и $\dfrac{\sqrt[14]{3^2}}{\sqrt[9]{3^2}}$; г) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$.

3. Исторические сведения

Математики Древней Греции изучали квадратные корни задолго до новой эры. Способы извлечения корня степени n также известны давно. Например, хорезмский математик Бируни (972—1048) в своей книге «Ключи к арифметике» описывает способ извлечения корня с любым натуральным показателем. Впрочем, способ этот громоздкий и неудобный. Начиная с XIII в. итальянские и другие европейские математики обозначали корень латинским словом Radix (корень) или сокращённо R. Так, французский математик Н. Шюке (ум. ок. 1500 г.) в XV в. писал $R^2 12$ вместо принятого теперь $\sqrt{12}$.

Немецкие математики в рукописи XV в. обозначали корень квадратный знаком ◊, корень четвёртой степени знаком ◊◊, корень кубический знаком ◊◊◊.

Итальянскому математику Д. Кардано (1501—1576) принадлежат формулы решения кубических уравнений, в которых используются кубические корни. В 1626 г. нидерландский математик А. Жирар ввёл близкое к современному обозначение для квадратных, кубических корней и т. д.:

$$\overset{2}{\vee},\ \overset{3}{\vee},\ \ldots .$$

Равенство $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$) применял в начале XV в. самаркандский учёный аль-Каши. Независимо от него нулевой показатель ввёл и Н. Шюке.

В XVI в. фламандский учёный С. Стевин (1548—1620) предложил понимать $\sqrt[n]{a}$ как степень положительного числа a с дробным показателем $\frac{1}{n}$, т. е. считать, что $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Систематически нулевые, отрицательные и дробные показатели стал применять И. Ньютон (1643—1727).

Рациональная степень числа позволила определить показательную функцию $y = a^x$, существенный вклад в изучение которой внёс Л. Эйлер (1707—1783).

Обобщением неравенства $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$ на случай n положительных чисел является неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}. \qquad (1)$$

Доказательство неравенства (1) впервые опубликовал в 1729 г. английский математик К. Маклорен (1698—1746), но известным это неравенство стало после того, как в 1821 г. французский математик О. Коши (1789—1857) опубликовал своё доказательство. Доказательство неравенства (1) довольно трудное и здесь не приводится.

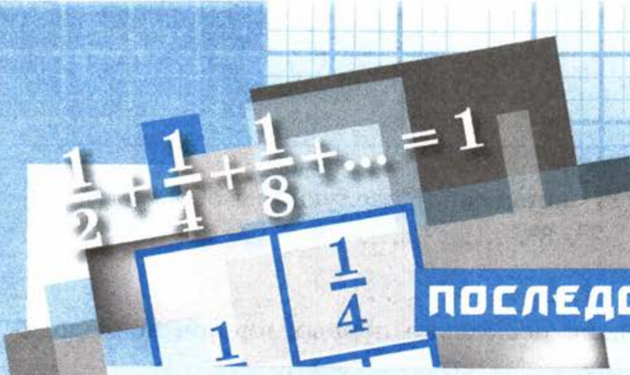
О. Коши

Числа

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

называют соответственно средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$. Поэтому свойство, выраженное неравенством (1), читают так:

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического.



ГЛАВА 3
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

При изучении материала главы 3 вам предстоит познакомиться с последовательностями, способами их задания и свойствами, изучить арифметическую и геометрическую прогрессии, их свойства и формулы, связанные с ними. Арифметическая и геометрическая прогрессии не только связаны с красивыми задачами и легендами прошлого (легенда о шахматной доске), но и позволяют изучать часто встречающиеся на практике процессы.

§ 6. Числовые последовательности и их свойства

6.1. Понятие числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n ($n = 1, 2, \ldots$) поставлено в соответствие по некоторому закону число x_n, то говорят, что задана последовательность чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \qquad (1)$$

или, короче, задана **числовая последовательность** $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называют **членами последовательности**, а член с номером n — её ***n*-м членом**, его ещё называют **общим членом.**

Задать последовательность — это значит указать закон, по которому можно вычислить её n-й член x_n для каждого натурального n.

Этот закон может выражаться разными способами: формулами, словесными описаниями и т. п.

Рассмотрим числовую последовательность, n-й член которой задан формулой

$$x_n = n^2 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (2)$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить любой член последовательности (2), соответствующий данному конкретному номеру n. Например:

$x_4 = 4^2 = 16,\quad x_{12} = 12^2 = 144,\quad x_{17} = 17^2 = 289.$

Последовательность (2) записывают следующим образом:

$$1,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$$

или

$$1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots .$$

В этой записи приведено несколько первых членов последовательности и её n-й член.

Пример 1. Пусть числовая последовательность записана в виде (1):

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots .$$

Тогда её общий член задан формулой

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Пример 2. Пусть числовая последовательность задана формулой общего (n-го) члена:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Тогда её можно записать следующим образом:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{256},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots .$$

Иногда (в очевидных случаях) числовую последовательность задают несколькими её первыми членами, имея в виду, что закономерность получения каждого следующего члена сохраняется и для всех остальных членов последовательности.

Пример 3. Пусть числовая последовательность задана несколькими её первыми членами:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots . \qquad (3)$$

Тогда очевидно, что формула общего (n-го) члена этой последовательности есть $a_n = 2n$.

Числовая последовательность упорядочена: у каждого её члена есть последующий член и у каждого её члена, кроме первого, есть предшествующий член.

Пример 4. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$: 1, 3, 5, 7, ... Тогда, например, у члена последовательности $a_3 = 5$ есть последующий член $a_4 = 7$ и есть предшествующий член $a_2 = 3$.

Замечание. Числовую последовательность можно задать **рекуррентно**[1], т. е. задать один или несколько первых членов последовательности и формулу, выражающую любой её член

[1] Рекуррентный — от лат. recurrens (recurrentis) — возвращающийся.

через один или несколько предшествующих. Например, последовательность (3) можно задать так:

$$a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Известная последовательность чисел Фибоначчи задаётся так: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Вычислим несколько первых её членов:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots .$$

407. а) Что называют числовой последовательностью? членами числовой последовательности? Приведите примеры числовых последовательностей.
б) Что значит задать числовую последовательность?
в) Какие способы задания числовых последовательностей вы знаете?

408. Дана последовательность чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
а) Назовите её первый, второй, третий, четвёртый, пятый и шестой члены.
б) Запишите формулу общего члена последовательности. Найдите седьмой, восьмой и двадцатый члены этой последовательности.

409. Запишите формулу общего члена последовательности:
а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; б) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...;
в) 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...; г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$;
д) 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...; е) −1, 1, −1, 1, −1, 1, ...

410. Дана формула общего члена последовательности:
а) $a_n = 3n - 1$. Найдите a_1; a_2; a_5; a_{100};
б) $a_n = 3 + 2(n - 1)$. Найдите a_1; a_2; a_{12}; a_{20}.

411. Найдите сумму первых шести членов последовательности, заданной формулой общего члена:
а) $a_n = 3n + 2$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

412. Числовая последовательность задана формулой общего члена $x_n = 10 + 2n$.
а) Найдите x_1; x_{10}; x_{100}.
б) Запишите последующий и предшествующий члены для x_n $(n \geqslant 2)$.
в) Запишите член последовательности, имеющий номер $n + 2$.

413. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = 3n - 2$; б) $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; в) $c_n = (-2)^n$.

Вычислите три первых и десятый член этой последовательности.

414. Последовательность задана первыми членами: 1, 5, 9, ... Запишите формулу её общего члена.

415. Последовательность задана рекуррентным способом:
а) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$; б) $b_1 = -2,\ b_{n+1} = 5 \cdot b_n$;
в) $c_1 = 4,\ c_{n+1} = c_n - 8$; г) $x_1 = 8,\ x_{n+1} = 0{,}25 \cdot x_n$.
Запишите пять первых её членов.

416. Последовательность задана рекуррентным способом:
а) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2$; б) $b_1 = -5,\ b_{n+1} = 2 \cdot b_n$;
в) $c_1 = 8,\ c_{n+1} = c_n - 4$; г) $x_1 = 9,\ x_{n+1} = 0{,}3 \cdot x_n$.
Задайте последовательность формулой n-го члена, вычислите пять первых её членов.

417. Последовательность задана первыми членами:
а) 5, 10, 15, 20, ...; б) 32, 16, 8, 4, ...; в) 2, –2, 2, –2, ...
Задайте последовательность рекуррентным способом, вычислите её восьмой член.

418. В предыдущем задании задайте последовательность формулой n-го члена, вычислите её девятый член.

419. Числовая последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = 5n$; б) $b_n = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; в) $c_n = (-0{,}5)^n$.

Задайте последовательность рекуррентным способом.

420. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = 177 - 3n$; б) $b_n = 125 - 7n$;
в) $x_n = 23 - 1{,}5n$; г) $y_n = 100 - \frac{n}{3}$.

Сколько положительных членов у этой последовательности?

421. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = -117 + 3n$; б) $b_n = -222 + 1{,}5n$;
в) $x_n = -237 + 5n$; г) $y_n = -100 + \frac{n}{7}$.

Сколько отрицательных членов у этой последовательности?

422. Сколько отрицательных членов имеет последовательность, заданная формулой общего члена:
а) $a_n = n^2 - 12n + 27$; б) $a_n = n^2 - 20n + 75$?

423. Найдите наименьший член последовательности, заданной формулой общего члена:
а) $a_n = n^2 - 19{,}8n + 113$; б) $a_n = n^2 - 22{,}2n + 126$.

424. **Исследуем.** Найдите все значения a, при каждом из которых последовательность, заданная формулой общего члена $y_n = n^2 - 20n + 100 - a$, имеет:
а) единственный отрицательный член;
б) ровно пять отрицательных членов;
в) ровно двадцать отрицательных членов.

425. Найдите числа Фибоначчи: u_{10} и u_{15}.

426. **Доказываем.** Докажите, что для любых натуральных n последовательность чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ обладает свойством:
а) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$;
б) $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$;
в) $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
г) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

6.2. Свойства числовых последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n,$$

называют **возрастающей** (строго возрастающей).

Каждый следующий член возрастающей последовательности больше предыдущего.

Примером возрастающей последовательности служит последовательность $\{a_n\}$, общий член которой задан формулой

$$a_n = 3n.$$

Неравенство $a_{n+1} > a_n$ выполняется для каждого натурального n, так как $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 3n = 3 > 0$ при любом натуральном n.

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_{n+1} < x_n,$$

называют **убывающей** (строго убывающей).

Каждый следующий член убывающей последовательности меньше предыдущего.

Примером убывающей последовательности служит последовательность $\{c_n\}$, общий член которой задан формулой

$$c_n = \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Неравенство $c_{n+1} < c_n$ выполняется для каждого натурального n, так как

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

при любом натуральном n.

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_{n+1} \geqslant x_n,$$

называют **неубывающей.** Примером неубывающей последовательности служит последовательность чисел Фибоначчи.

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_{n+1} \leqslant x_n,$$

называют **невозрастающей.** Примером невозрастающей последовательности служит последовательность $\{c_n\}$: 5, 5, 4, 4, ..., которую можно задать так:

$$c_{2n-1} = c_{2n} = 6 - n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называют **монотонными.**

Рассмотренные выше последовательности и последовательность чисел Фибоначчи являются монотонными, а последовательность $\{y_n\}$, где

$$y_n = (-1)^n,$$

не является монотонной, так как, например, $y_2 > y_1$, а $y_3 < y_2$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограниченной сверху,** если существует такое число B, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство $x_n \leqslant B$.

Ограниченной сверху, например, является последовательность (1), так как для каждого её члена выполняется неравенство $c_n \leqslant 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограниченной снизу,** если существует такое число A, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство $x_n \geqslant A$.

Ограниченной снизу, например, является последовательность чисел Фибоначчи, так как для каждого её члена выполняется неравенство $u_n \geqslant 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограниченной,** если она ограничена и снизу, и сверху.

Ограниченной, например, является последовательность (1), так как для каждого её члена выполняется неравенство $0 < c_n \leqslant 1$.

Замечание. Числовая последовательность всегда имеет бесконечное число членов. Иногда бывает удобно рассматривать числовую последовательность с номерами её членов, пробегающими конечное число значений 1, 2, ..., m. Тогда принято говорить, что задана **конечная последовательность** с числом членов m.

Например, последовательность простых чисел среди первых двадцати натуральных чисел конечна, она содержит 8 членов:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\ \ (m = 8).$$

Последовательность всех простых чисел бесконечна. Этот факт был доказан ещё Евклидом.

Последовательность $\{a_n\}$, заданная формулой n-го члена

$$a_n = 3n,$$

бесконечная — любому натуральному n соответствует член последовательности $3n$.

Этой же формулой можно задать конечную последовательность, если n принимает лишь несколько первых натуральных значений. Например, последовательность

$$b_n = 3n \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

конечная. Она содержит 4 члена: 3, 6, 9, 12.

Первый и последний члены конечной последовательности называют **крайними членами последовательности**.

427. Какую последовательность называют:
а) невозрастающей; б) неубывающей;
в) монотонной; г) ограниченной сверху;
д) ограниченной снизу; е) ограниченной;
ж) возрастающей; з) убывающей?
Приведите примеры.

Доказываем (428—429).

428. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = 7n - 11$; б) $b_n = 6^n$; в) $c_n = -3 + (1{,}2)^n$;
г) $a_n = 2 + 3n$; д) $b_n = 3 \cdot 2^n$; е) $c_n = -3 \cdot (0{,}2)^n$.
Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной снизу.

429. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = -2n + 1$; б) $b_n = (0{,}2)^n$; в) $c_n = 3 - (1{,}1)^n$;
г) $a_n = 3 - 2n$; д) $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; е) $c_n = -16 \cdot 2^n$.
Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной сверху.

430. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = (-2)^n$; б) $b_n = 2 \cdot (-1)^n$; в) $c_n = n \cdot (-1)^n$;
г) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; д) $x_n = 2 + (-1)^n$; е) $y_n = (-1)^n$.
Покажите, что она не является монотонной. Какие из приведённых последовательностей являются ограниченными?

431. Придумайте свой пример последовательности:
а) монотонной; б) немонотонной;
в) ограниченной снизу; г) ограниченной.

432. Верно ли, что всякая возрастающая последовательность ограничена снизу, а всякая убывающая последовательность ограничена сверху?

433. **Доказываем.** Докажите, что последовательность десятичных приближений числа π с недостатком 3; 3,1; 3,14; 3,141; ... является ограниченной.

434. Задайте формулой последовательность:
а) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;
б) 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;
в) 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...;
г) 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, ...

Доказываем (435—436).

435. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = \frac{n-1}{n}$; б) $b_n = \frac{2n+3}{2n+5}$; в) $x_n = \frac{3n+5}{4n+7}$; г) $y_n = \frac{4n-3}{2n-1}$.
Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной.

436. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = \frac{n+1}{n}$; б) $b_n = \frac{2n+5}{2n+3}$; в) $x_n = \frac{3n+4}{4n+1}$; г) $y_n = \frac{4n-1}{3n-2}$.
Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной.

437. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = \frac{3n+5}{2n-1}$; б) $b_n = \frac{2n+1}{3n-5}$; в) $x_n = \frac{3n-5}{2n-1}$; г) $y_n = \frac{2n+1}{3n+5}$.
Является ли последовательность возрастающей, убывающей, ограниченной?

438. Укажите все значения b, при которых последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1999n+b}{2000n}$, является:
а) возрастающей; б) убывающей.

§ 7. Арифметическая прогрессия

7.1. Понятие арифметической прогрессии

Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему, сложенному с постоянным для данной последовательности числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии.**

Таким образом, если числовая последовательность $\{a_n\}$ есть арифметическая прогрессия, то для неё существует такое число d — разность арифметической прогрессии, что

$$a_{n+1} = a_n + d$$

для любого натурального числа n.

Например, последовательности

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n,\ \dots, \qquad (1)$$

$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ \dots,\ 5-2n,\ \dots \qquad (2)$$

являются арифметическими прогрессиями. У арифметической прогрессии (1) разность $d = 1$, а у арифметической прогрессии (2) разность $d = -2$.

Отметим некоторые *свойства* арифметической прогрессии.

1. Для любой арифметической прогрессии $\{a_n\}$ её n-й член a_n выражается через её первый член a_1 и разность этой прогрессии d при помощи формулы

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d,$$

называемой формулой n-го члена арифметической прогрессии.

В самом деле,

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

. . . .

На $(n-1)$-м этапе этих рассуждений получим, что

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

2. Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов.

То есть

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

где $n = 2,\ 3,\ \dots$.

В самом деле, $a_{n-1} = a_n - d$, $a_{n+1} = a_n + d$, тогда

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n.$$

Например, если известны два члена арифметической прогрессии $a_7 = -3$ и $a_9 = 1$, то можно найти a_8:

$$a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1.$$

Замечание. Полное доказательство свойства 1 требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

Задача. Вкладчик положил на счёт в банке a р. при условии, что ежемесячно на его счёт будет начисляться $p\%$ от первоначальной суммы вклада. Вкладчик не снимал денег со счёта n месяцев, а в начале $(n+1)$-го месяца снял все деньги со счёта. Какую сумму он снял со счёта?

Решение. Сначала на счёте вкладчика было a р., через месяц у него было $(a+d)$ р., где $d = \frac{a \cdot p}{100}$. Каждый месяц сумма на счёте увеличивалась на одну и ту же сумму d р., поэтому через n месяцев на счёте вкладчика была сумма $a + nd = a\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$ р.

Ответ: $a\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$ р.

Заметим, что если рассмотреть арифметическую прогрессию с первым членом $x_1 = a$ и разностью $d = \frac{a \cdot p}{100}$, то, вычислив по формуле общего члена арифметической прогрессии $(n+1)$-й член, получим тот же результат:

$$x_{n+1} = a\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right).$$

Эту формулу называют **формулой простых процентов**.

439. а) Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
б) Что называют разностью арифметической прогрессии?
в) Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.
г) Какими свойствами обладает арифметическая прогрессия?

440. Дана последовательность $\{a_n\}$: 2, 7, 12, 22, 27, ...
а) Определите разность между каждым последующим членом и предыдущим.
б) Является ли последовательность $\{a_n\}$ арифметической прогрессией?

441. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой общего члена $a_n = a_1 + (n-1)d$, где $a_1 = 3$, $d = 2$. Найдите пять первых членов прогрессии.

442. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$: 1, 7, 13, ...
а) Найдите разность арифметической прогрессии.
б) Найдите a_7; a_8; a_9; a_{10}.

443. Является ли арифметической прогрессией последовательность:
а) $-5, -2, 1, 1, 4, 7, 10, \ldots;$ б) $7, 0, -7, -14, -21, \ldots;$
в) $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, \ldots;$ г) $-1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots$?

444. Запишите первых четыре члена арифметической прогрессии, если $a_1 = 2$, $d = -3$.

445. Найдите пятый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$: $2, 4\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, \ldots$.

446. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ найдите:
а) a_2 и d, если $a_3 = 5$, $a_4 = 9$;
б) a_1 и d, если $a_2 = 7$, $a_3 = 4$;
в) a_5 и d, если $a_6 = 8$, $a_4 = 12$;
г) a_7 и d, если $a_6 = -15$, $a_8 = -11$.

447. Доказываем. Докажите, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$ разность d можно вычислить по формуле

$$d = \frac{a_m - a_k}{m - k},\ m \neq k.$$

В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ найдите **(448—450)**:

448. а) a_2 и d, если $a_1 = 5$, $a_3 = 13$;
б) a_1 и d, если $a_2 = 3$, $a_{10} = 19$;
в) a_2 и d, если $a_{12} = -2$, $a_3 = 7$;
г) a_{101}, если $a_{12} = 20{,}5$, $a_7 = 10{,}5$.

449. а) $a_2 + a_9$, если $a_1 + a_{10} = 120$; б) $a_1 + a_{21}$, если $a_2 + a_{20} = 24$;
в) a_3, если $a_1 + a_5 = 48$; г) a_6, если $a_3 + a_9 = 160$.

450. а) a_{17}, если $a_{15} + a_{19} = 12$; б) a_{20}, если $a_{19} + a_{21} = -20$;
в) a_5, если $a_3 + a_7 = 6$; г) a_8, если $a_2 + a_{14} = 28$.

451. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии:
а) $-10, -8, -6, \ldots;$ б) $-11, -8, -5, \ldots;$
в) $-3, 0, 3, \ldots;$ г) $44{,}5, 43, 41{,}5, \ldots$?
Если да, то укажите его номер.

452. Является ли число 34 членом арифметической прогрессии $-47, -44, -41, \ldots$? Если да, то укажите его номер.

453. Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия:
а) $3{,}8, 3{,}5, 3{,}2, \ldots;$ б) $7{,}1, 6{,}9, 6{,}7, \ldots;$
в) $14\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}, 13, \ldots;$ г) $15\frac{3}{4}, 14\frac{1}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots$?

454. Сколько отрицательных членов имеет арифметическая прогрессия:

а) $-3{,}9,\ -3{,}7,\ -3{,}5,\ \ldots;$ б) $-8{,}2,\ -7{,}9,\ -7{,}6,\ \ldots;$

в) $-18\frac{2}{3},\ -15\frac{1}{3},\ -12,\ \ldots;$ г) $-16\frac{1}{4},\ -15\frac{1}{2},\ -14\frac{3}{4},\ \ldots?$

455. **Доказываем.** Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена:

а) $a_n = 3n - 7$; б) $a_n = -3n + 5$; в) $a_n = 2n + 8$; г) $a_n = -2n - 3$, является арифметической прогрессией.

456. Верно ли, что арифметическая прогрессия:

а) возрастает и ограничена снизу, если $d > 0$;

б) убывает и ограничена сверху, если $d < 0$?

457. Предприниматель взял в банке кредит на сумму a р. при условии, что в конце каждого месяца его долг перед банком будет увеличиваться на $p\%$ от суммы взятого кредита. Предприниматель вернул деньги банку сполна в сумме b р. через n месяцев.

а) Какую сумму предприниматель вернул банку, если $a = 500\,000$, $p = 2$, $n = 10$?

б) На какую сумму предприниматель взял кредит, если $p = 2$, $n = 12$, $b = 992\,000$?

в) Через сколько месяцев предприниматель вернул банку деньги, если $a = 600\,000$, $p = 3$, $b = 852\,000$?

г) Под какой процент в месяц предприниматель взял кредит, если $a = 700\,000$, $n = 6$, $b = 910\,000$?

458. Покажите, как ответ к каждой задаче из предыдущего номера можно получить с помощью формулы общего члена арифметической прогрессии.

7.2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Число, равное сумме первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна произведению полусуммы первого и n-го её членов на число слагаемых (n), т. е. справедлива формула

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.} \qquad (1)$$

Действительно,

$$2S_n = S_n + S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1) =$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

Поскольку $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$,

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$

и т. д., то получаем

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Отсюда следует справедливость формулы (1).

Если в формуле (1) заменить a_n на $a_1 + (n-1)d$, то получим другую запись формулы для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.} \qquad (2)$$

Пример 1. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ заданы первый член $a_1 = 11$ и пятнадцатый член $a_{15} = 27$. Вычислим сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии.

По формуле (1) имеем

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{11 + 27}{2} \cdot 15 = 285.$$

Пример 2. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ заданы первый член $a_1 = 9$ и разность $d = 2$. Вычислим сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

По формуле (2) имеем

$$S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)d}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 2) \cdot 5 = 180.$$

Замечание. Полное доказательство формулы (1) требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

459. Запишите формулу для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии по её:

а) первому и n-му членам;

б) первому члену и разности прогрессии.

460. Вычислите сумму:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$;

б) $30 + 31 + 32 + \ldots + 38 + 39 + 40$;

в) $11 + 12 + 13 + \ldots + 87 + 88 + 89$.

Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Вычислите **(461—463)**:

461. а) S_{20}, если $a_1 = 1$, $a_{20} = 20$; б) S_{30}, если $a_1 = -10$, $a_{30} = 20$;

в) S_{13}, если $a_1 = 17$, $a_{13} = 13$; г) S_{17}, если $a_1 = 11$, $a_{17} = 19$.

462. а) S_{20}, если $a_1 = 1$, $d = 1$; б) S_{40}, если $a_1 = 2$, $d = 2$;
в) S_{11}, если $a_1 = -2$, $d = 4$; г) S_{15}, если $a_1 = -3$, $d = 3$.

463. а) S_{10}, если $a_2 = 1$, $d = -2$; б) S_5, если $a_8 = 4$, $d = -1$;
в) S_{17}, если $a_9 = 2$; г) S_{19}, если $a_{10} = 4$.

464. а) Определите сумму первых 40 чётных натуральных чисел.
б) Определите сумму всех трёхзначных натуральных чисел.
в) Определите сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, кратных 3.

465. Определите сумму всех двузначных чисел:
а) делящихся на 3;
б) делящихся на 4;
в) делящихся и на 3, и на 4;
г) не делящихся ни на 3, ни на 4.

466. Сложили несколько первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ и получили 430. Сколько членов сложили, если $a_1 = -7$, $d = 3$?

467. Сколько ударов сделают настенные часы за сутки, если они бьют только один раз в час, отбивая число часов?

468. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$: $a_5 = 11$, $a_8 = 17$. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

469. Придумайте задачу на нахождение суммы n членов арифметической прогрессии.

470. **Доказываем.** Докажите, что для любой арифметической прогрессии $\{a_n\}$ справедлива формула

$$S_{2n-1} = a_n(2n - 1).$$

471. Для арифметической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите S_{2001}, если $a_{1001} = 2000$.

472. *Задача Пифагора (580—500 гг. до н. э.).* Найдите сумму первых нечётных натуральных чисел:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

473. *Задача из папируса Ахмеса (XVIII—XVII вв. до н. э.).* Разделите 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством хлеба у каждого человека и ему предшествующего составляет $\frac{1}{8}$ меры.

474. **Доказываем.** В арифметической прогрессии сумма первых m членов равна сумме первых n членов ($m \neq n$). Докажите, что сумма первых $(m + n)$ членов равна нулю.

§ 8. Геометрическая прогрессия

8.1. Понятие геометрической прогрессии

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему члену, умноженному на отличное от нуля, постоянное для данной последовательности число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии.**

Конечно, последовательность 0, 0, 0, ... можно рассматривать как геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = 0$ и любым знаменателем, но принято исключать эту последовательность из рассмотрения. Поэтому дальше будем считать, что $a_1 \neq 0$.

Таким образом, если последовательность $\{a_n\}$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $q \neq 0$ и $a_{n+1} = a_n \cdot q$ для любого натурального числа n. Например, последовательности

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots, \tag{1}$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{1}{7},\ -\frac{1}{21},\ \frac{1}{63},\ -\frac{1}{189},\ \ldots,\ \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ \ldots \tag{3}$$

являются геометрическими прогрессиями. У геометрической прогрессии (1) знаменатель $q = 2$, у прогрессии (2) знаменатель $q = -1$, у прогрессии (3) знаменатель $q = -\frac{1}{3}$.

Отметим некоторые *свойства* геометрической прогрессии.

> **1. Для любой геометрической прогрессии $\{a_n\}$ её n-й член a_n выражается через её первый член a_1 и знаменатель этой прогрессии q при помощи формулы**
> $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$
> **называемой формулой n-го члена геометрической прогрессии.**

В самом деле,

$$a_1 = a_1 \cdot q^0,$$
$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

На $(n - 1)$-м этапе рассуждений получим, что

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

2. Любой член, кроме первого, геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами есть среднее геометрическое предшествующего и последующего членов:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

В самом деле,

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q} = \sqrt{a_n^2} = a_n,$$

так как $a_n > 0$.

Например, если известны два члена геометрической прогрессии с положительными членами $a_7 = 32$ и $a_9 = 2$, то можно найти a_8:

$$a_8 = \sqrt{a_7 \cdot a_9} = \sqrt{32 \cdot 2} = 8.$$

Замечание. Полное доказательство свойства 1 требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

Задача. В начале месяца вкладчик положил на счёт в банке a р. при условии, что ежемесячно на его счёт будет начисляться $p\%$ от той суммы вклада, которая будет находиться на его счёте в начале этого месяца. Вкладчик не снимал денег со счёта n месяцев, а в начале $(n + 1)$-го месяца снял все деньги со счёта. Какую сумму он снял со счёта?

Решение. Сначала на счёте вкладчика было a р., через месяц у него было $a + \frac{a \cdot p}{100} = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р. Каждый месяц сумма на счёте увеличивалась в $q = 1 + \frac{p}{100}$ раз, поэтому через n месяцев на счёте вкладчика была сумма $aq^n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р.

Ответ: $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р.

Заметим, что если рассмотреть геометрическую прогрессию с первым членом $x_1 = a$ и знаменателем $q = 1 + \frac{p}{100}$, то, вычислив по формуле общего члена геометрической прогрессии $(n + 1)$-й член, получим тот же результат:

$$x_{n+1} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Эту формулу называют **формулой сложных процентов.**

475. а) Какую последовательность называют геометрической прогрессией? Что называют знаменателем геометрической прогрессии?
б) Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии. Какими свойствами обладает геометрическая прогрессия?

476. а) Задана последовательность $\{a_n\}$: 2, 4, 8, 16, ... Определите частное от деления каждого последующего члена на предшествующий.
б) Является ли последовательность $\{a_n\}$ геометрической прогрессией?

477. а) Дана геометрическая прогрессия 1, 3, 9, 27, ... Найдите знаменатель этой прогрессии и её пятый, шестой и седьмой члены.
б) Геометрическая прогрессия задана формулой общего члена $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$. Найдите пять первых членов этой прогрессии.

478. Является ли геометрической прогрессией последовательность:
а) 1, 8, 15, 21, 26, ...; б) 4, 2, 1, 0,5, 0,25, ...;
в) −2, 2, −2, 2, −2, ...; г) 0, 4, 16, 64, 256, ...?

479. Запишите четыре первых члена геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = 2$, $q = 0{,}25$.

480. Найдите пятый член геометрической прогрессии $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$.

481. Задана геометрическая прогрессия $\{a_n\}$. Вычислите:
а) a_3, если $a_1 = 0{,}5$, $q = -2$;
б) a_4, если $a_1 = -2$, $q = 3$;
в) a_3 и q, если $a_1 = 3$, $a_2 = 4$;
г) a_3 и q, если $a_1 = -4$, $a_2 = 6$;
д) a_1 и q, если $a_2 = -1$, $a_3 = 2$;
е) a_1 и q, если $a_2 = -3$, $a_3 = -2$;
ж) q, если $a_5 = 4$, $a_8 = 108$;
з) q, если $a_4 = 5$, $a_7 = 320$.

482. Даны три последовательных члена геометрической прогрессии:
а) 7; x; 63. Найдите x, если $x > 0$;
б) 2; x; 18. Найдите x, если $x < 0$;
в) 3,2; x; 0,2. Найдите x.

483. Найдите a_1 и q геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если:
а) $a_4 - a_2 = 18$ и $a_5 - a_3 = 36$; б) $a_1 + a_4 = 30$, $a_2 + a_3 = 10$.

484. **Доказываем.** Докажите, что для любой геометрической прогрессии $\{b_n\}$ верно равенство:

а) $\frac{b_9 + b_{10}}{b_7 + b_9} = \frac{b_{11} + b_{12}}{b_9 + b_{11}}$; б) $\frac{b_5 + b_6 + b_7}{b_8 + b_9 + b_{10}} = \frac{b_{11} + b_{12} + b_{13}}{b_{14} + b_{15} + b_{16}}$.

485. Верно ли, что геометрическая прогрессия с положительными членами:

а) возрастает и ограничена снизу, если $q > 1$;

б) убывает и ограничена сверху, если $0 < q < 1$?

486. Определите, возрастает или убывает геометрическая прогрессия $\{a_n\}$:

а) если $a_1 < 0$, $q > 1$; б) если $a_1 < 0$, $0 < q < 1$.

Является ли она ограниченной?

487. *Задачи И. Ньютона (1643—1727).* а) Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Сумма двух крайних членов равна 13, двух средних равна 4. Определите эти члены.

б) Даны три последовательных члена геометрической прогрессии. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Определите эти члены.

488. В начале месяца вкладчик положил на счёт в банке a р. при условии, что в конце каждого месяца на его счёт будет начисляться $p\%$ от той суммы вклада, которая будет находиться на его счёте в начале этого месяца. Вкладчик не снимал деньги со счёта n месяцев, а в начале $(n + 1)$-го месяца снял со счёта все деньги в сумме b р.

а) Какую сумму вкладчик снял со счёта, если $a = 600\,000$, $p = 1$, $n = 2$?

б) Какую сумму вкладчик положил на счёт, если $b = 530\,604$, $p = 2$, $n = 3$?

в) Покажите, как ответ к каждой из задач а) и б) можно получить с помощью формулы общего члена геометрической прогрессии.

8.2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Число, равное сумме первых n членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$, обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$ со знаменателем q равна:

$$S_n = na_1 \text{ при } q = 1; \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \text{ при } q \neq 1. \qquad (2)$$

В самом деле, при $q = 1$ формула (1) очевидна.

Пусть теперь $q \neq 1$. Справедливы очевидные равенства

$$S_n(1-q) = S_n - S_nq = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1} -$$
$$-(a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n).$$

Следовательно,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

и так как $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}.$$

Формула (2) доказана.

Заметим, что формулой (2) удобно пользоваться, если $q < 1$. Если же $q > 1$, то удобно пользоваться другой записью формулы (2):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}. \qquad (3)$$

Пример 1. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$, вычислим сумму первых пяти её членов.

По формуле (2) имеем

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (1-q^5)}{1-q} = \frac{8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15{,}5.$$

Пример 2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_1 = 8$, $q = 2$, вычислим сумму первых пяти её членов.

По формуле (3) имеем

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (q^5 - 1)}{q-1} = \frac{8(2^5-1)}{2-1} = 248.$$

Замечание. Полное доказательство формулы (2) требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

489. По какой формуле вычисляют сумму первых n членов геометрической прогрессии?

490. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

а) $a_1 = 5$, $q = 2$; б) $a_1 = 4$, $q = -3$;

в) $a_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$; г) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$;

д) $a_2 = -2$, $a_3 = 8$; е) $a_3 = 2$, $a_1 = 1$.

491. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите S_6, если $a_1 = 48$, $q = -\frac{1}{2}$.

492. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_1 = 1$, $q = -1$.
Вычислите: а) S_{100}; б) S_{101}.

493. Вычислите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии:
а) –32, 16, –8, 4, ...; б) 32, 16, 8, 4, ...

494. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите:
а) S_{10}, если $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = 2$; б) S_{10}, если $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = -2$;
в) S_6, если $a_1 = -\frac{1}{27}$, $q = 3$; г) S_6, если $a_1 = -\frac{1}{27}$, $q = -3$.

495. Вычислите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если:
а) разность между вторым и первым членами прогрессии равна 4, а между четвёртым и третьим равна 16;
б) разность между вторым и первым членами прогрессии равна 3, а сумма трёх её первых членов равна 21;
в) сумма трёх первых членов прогрессии равна 111, а куб её знаменателя равен 4.

496. Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна 64, произведение первого и десятого членов равно 16. Найдите сумму чисел, обратных этим десяти членам геометрической прогрессии.

8.3*. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Геометрическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

называют **бесконечно убывающей,** если модуль её знаменателя меньше 1: $|q| < 1$. Например, геометрическая прогрессия

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

бесконечно убывающая, потому что модуль её знаменателя меньше 1:

$$|q| = \frac{1}{2} < 1.$$

Отметим, что для любой геометрической прогрессии формулу суммы первых n её членов можно переписать так:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n. \quad (1)$$

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии второй член в правой части равенства (1) при неограниченном увеличении n стремится к нулю, но тогда левая часть равенства (1), т. е. S_n, стремится к числу

$$S = \frac{a_1}{1-q}. \quad (2)$$

Это число $S = \dfrac{a_1}{1-q}$ называют **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии**

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

со знаменателем q ($|q| < 1$).

Пишут:

$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

где

$$a_n = a_1 q^{n-1} \ (|q| < 1).$$

Пример 1. Вычислим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots .$$

Здесь $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$. По формуле (2) имеем

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Если рассмотреть квадрат, площадь которого принята за единицу, закрасить сначала $\dfrac{1}{2}$ квадрата, потом $\dfrac{1}{4}$, потом $\dfrac{1}{8}$, потом $\dfrac{1}{16}$ и т. д. (рис. 60), то станет ясно, что процесс такого закрашивания бесконечен и сумма площадей закрашенных частей квадрата неограниченно приближается к площади данного квадрата (стремится к 1).

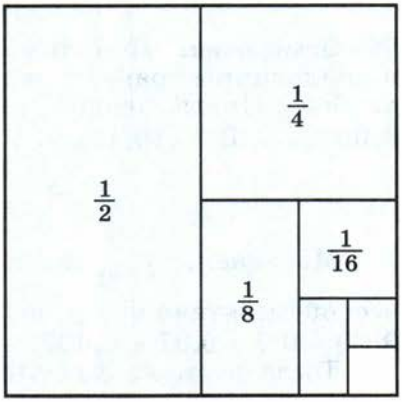


Рис. 60

Пример 2. Вычислим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots$.

Здесь $a_1=1$, $q=-\frac{1}{2}$. По формуле (2) имеем $S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$.

Иногда для обращения периодических дробей в обыкновенные используют формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Покажем, как это делается, на примерах.

Пример 3. Обратим бесконечную периодическую дробь 0,(7) в обыкновенную дробь.

Сначала запишем данную дробь в виде

$$0{,}(7)=0{,}777\ldots=0{,}7+0{,}07+0{,}007+\ldots. \quad (3)$$

Правая часть этого равенства есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с первым членом $a_1=0{,}7$ и знаменателем $q=0{,}1$, поэтому по формуле (2) имеем

$$0{,}(7)=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}.$$

Пример 4. Обратим бесконечную периодическую дробь 0,1(45) в обыкновенную дробь.

Сначала запишем данную дробь в виде

$$0{,}1(45)=0{,}14545\ldots=0{,}1+0{,}045+0{,}00045+\ldots.$$

В правой части этого равенства после 0,1 записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с первым членом $a_1=0{,}045$ и знаменателем $q=0{,}01$, поэтому по формуле (2) имеем

$$0{,}1(45)=0{,}1+\frac{0{,}045}{1-0{,}01}=\frac{1}{10}+\frac{0{,}045}{0{,}99}=\frac{1}{10}+\frac{45}{990}=\frac{8}{55}.$$

Замечание. Поясним, почему справедливо равенство (3) и аналогичные равенства для других периодических десятичных дробей. Пусть задана геометрическая прогрессия 0,7, 0,07, 0,007, ..., $0{,}7\cdot(0{,}1)^{n-1}$, ... Тогда по формуле (2) имеем

$$S=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}. \quad (4)$$

Мы знаем, что $\frac{7}{9}$ можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}(7)=0{,}777\ldots$. Поэтому считают, что $0{,}(7)=0{,}7+0{,}07+0{,}007+\ldots$.

Тогда формула (4) есть формула обращения бесконечной периодической десятичной дроби 0,(7) в обыкновенную дробь $\frac{7}{9}$.

497. а) Какую геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей?
б) Придумайте пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая не является убывающей последовательностью.

498. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если:

а) $a_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$; б) $a_1 = 4,\ q = -\frac{1}{2}$;

в) $a_1 = 5,\ q = \frac{1}{10}$; г) $a_1 = 5,\ q = -\frac{1}{10}$.

499. Обратите в обыкновенную дробь бесконечную периодическую десятичную дробь:
а) 0,(3); б) 0,(8); в) 0,(5);
г) 0,(13); д) 0,(27); е) 0,(45);
ж) 0,(123); з) 0,(456); и) 0,(1999);
к) 0,5(7); л) 0,23(8); м) 0,2(38).

500. **Доказываем.** *Задача П. Ферма (1601—1665).* Докажите, что для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, имеющей сумму S, выполняется равенство

$$\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

501. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};\ \dots;$

б) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1};\ \dots\ .$

502. Дан острый угол, величина которого равна α. На его стороне на расстоянии l от вершины отметили точку A_1. Из неё провели перпендикуляр A_1A_2 ко второй стороне угла, из точки A_2 провели перпендикуляр A_2A_3 к первой стороне и т. д. (рис. 61). Получилась ломаная с бесконечным числом звеньев. Вычислите её длину, если:
а) $l = 1$ м, $\alpha = 45°$;
б) $l = 1$ м, $\alpha = 30°$.

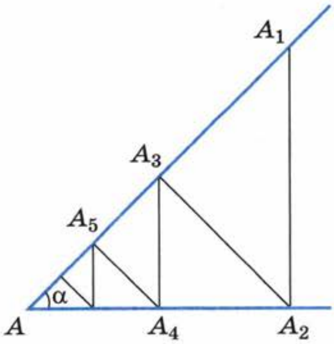


Рис. 61

Дополнения к главе 3

1. Метод математической индукции

Сформулируем **принцип математической индукции.**

Если свойство, зависящее от натурального n, во-первых, верно при $n = 1$ и, во-вторых, из предположения, что оно верно при $n = k$, следует, что оно верно при $n = k + 1$, то считают, что это свойство верно для любого натурального n.

Например, пусть надо доказать, что если $a > 0$, то

$$a^n > 0 \tag{1}$$

для любого натурального n.

Согласно принципу математической индукции, чтобы считать верным неравенство (1) для всех натуральных n, достаточно проверить, что выполняются следующие два утверждения:

1) неравенство (1) справедливо для $n = 1$;

2) если допустить, что для некоторого $n = k$ неравенство (1) справедливо, т. е. имеет место неравенство $a^k > 0$, то оно справедливо и для $n = k + 1$, т. е. имеет место неравенство

$$a^{k+1} > 0.$$

Утверждение 1 действительно выполняется, потому что, положив в неравенстве (1) $n = 1$, получим неравенство $a > 0$, верное по условию.

Утверждение 2 тоже выполняется, ведь если предположить верным неравенство $a^k > 0$, то после умножения его на положительное число a получим верное неравенство $a^{k+1} > 0$.

Таким образом, утверждения 1 и 2 выполняются. Но тогда согласно принципу математической индукции неравенство (1) верно для любого натурального n.

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называют **доказательством по индукции** или **доказательством методом математической индукции.**

Заметим, что не только доказательство приведённого выше свойства, но и определение n-й степени, строго говоря, нужно давать по индукции.

Например, говорят, что a^n при натуральном n есть такое число, которое определяется следующим образом:

$$a^1 = a \quad \text{и} \quad a^{k+1} = a^k \cdot a \tag{2}$$

для любого натурального k.

Пользуясь этим определением, получим, например, что

$$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \cdot a \cdot a = \\ = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

Пример 1. Докажем по индукции, что

$$0^n = 0 \tag{3}$$

для любого натурального n.

При $n = 1$ равенство (3) очевидно.

Если допустить, что равенство $0^k = 0$ доказано, то отсюда будет следовать, что

$$0^{k+1} = 0^k \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Тогда согласно принципу математической индукции равенство (3) надо считать верным для любого натурального n.

Пример 2. Докажем, что если $0 < a < b$, то

$$a^n < b^n \tag{4}$$

для любого натурального n. Это утверждение доказывают по индукции следующим образом.

При $n = 1$ неравенство (4) верно, так как по условию $a < b$.

Пусть при $n = k$ неравенство (4) верно, т. е.

$$a^k < b^k. \tag{5}$$

Так как по условию a — положительное число, то и a^k — положительное число, что было доказано выше. Умножив неравенство $a < b$ на a^k и неравенство (5) на $b > 0$, получим

$$a^{k+1} < a^k \cdot b \ \text{ и } \ a^k \cdot b < b^{k+1},$$

откуда следует, что

$$a^{k+1} < b^{k+1}.$$

Тогда согласно принципу математической индукции неравенство (4) надо считать верным для любого натурального n.

Пример 3. Докажем, что для любого числа $b \geqslant 1$ и любого натурального n справедливо неравенство

$$(1 + b)^n \geqslant 1 + nb. \tag{6}$$

Действительно, так как $(1 + b)^1 = 1 + b$, то при $n = 1$ неравенство (6) выполняется.

Предположим, что неравенство (6) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что неравенство $(1 + b)^k \geqslant 1 + kb$ верно. Так как $1 + b \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned}(1 + b)^{k+1} = (1 + b)^k \cdot (1 + b) \geqslant \\ \geqslant (1 + kb) \cdot (1 + b) = 1 + (k + 1)b + kb^2 \geqslant \\ \geqslant 1 + (k + 1)b,\end{aligned}$$

т. е. мы доказали неравенство (6) для $n = k + 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции неравенство (6) верно при любом натуральном n.

Пример 4. Докажем равенство

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (7)$$

для любых натуральных m и n.

Зададим произвольное m и будем, как говорят, вести индукцию по n. При $n = 1$ равенство (7) верно по определению степени с натуральным показателем (см. (2)):

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Пусть теперь равенство (7) верно при $n = k$:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}.$$

Тогда по определению степени (см. (2)) имеем

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot a^k \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1},$$

т. е.

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}.$$

Согласно принципу математической индукции равенство (7) верно для любого натурального n при произвольно выбранном m, т. е. равенство (7) верно для любых натуральных m и n.

Пример 5. Докажем, что общий член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (8)$$

Действительно, так как $a_1 = a_1 + (1-1)d$, то при $n = 1$ равенство (8) выполняется.

Предположим, что равенство (8) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что

$$a_k = a_1 + (k-1)d.$$

Тогда

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd,$$

т. е. равенство (8) выполняется для $n = k + 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции равенство (8) верно при любом натуральном n.

Пример 6. Докажем, что сумма первых n членов геометрической прогрессии ($q \neq 1$) вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (9)$$

Действительно, так как

$$S_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1,$$

то при $n = 1$ равенство (9) выполняется.

Предположим, что равенство (9) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что

$$S_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1}.$$

Тогда

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_1q^k =$$
$$= \frac{a_1q^k - a_1 + a_1q^{k+1} - a_1q^k}{q - 1} = \frac{a_1q^{k+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1},$$

т. е. равенство (9) выполняется для $n = k + 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции равенство (9) верно при любом натуральном n.

503. а) В чём заключается принцип математической индукции?
б) Объясните, как доказывают утверждения методом математической индукции, на примере доказательства равенства $1^n = 1$ для любого натурального n.

Доказываем (504—516).

504. Докажите методом математической индукции равенство:
а) $a^nb^n = (ab)^n$; б) $(a^n)^m = a^{mn}$.

505. Пусть $a < 0$. Докажите методом математической индукции, что:
а) $a^n > 0$ для любого чётного натурального n;
б) $a^n < 0$ для любого нечётного натурального n.

506. Докажите методом математической индукции, что:
а) общий член геометрической прогрессии вычисляется по формуле $a^n = a_1 \cdot q^{n-1}$;
б) сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$.

507. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n выполняется равенство:
а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n + 1)n}{2}$;
б) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$;
в) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;
г) $3 + 12 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$;
д) $4 + 0 + \ldots + 4 \cdot (2 - n) = 2n(3 - n)$;
е) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$;
ж) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$.

508. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n выполняется неравенство:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n \leqslant n^2$; б) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n < (n + 1)^2$;

в) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} > \frac{1}{2n}$; г) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$;

д) $4^n > 7n - 5$; е) $2^n > 5n + 1$, $n \geqslant 5$.

509. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

510. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

511. *Задача аль-Караджи (Иран, XI в.).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

512. *Задача аль-Каши (XIV—XV вв.).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

513. *Задача Фаульхабера (Германия, 1580—1635).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$

514. Докажите, что для любого натурального n:

а) $5^n + 3$ делится на 4;
б) $7^n + 5$ делится на 6;
в) $4^n + 6n - 1$ делится на 9;
г) $5^n + 4n - 1$ делится на 8.

515. Докажите, что:

а) $7^n + 9$ делится на 8 для любого нечётного натурального n;
б) $3^n + 7$ делится на 8 для любого чётного натурального n.

516. На один из трёх штырьков насажены n различных колец так, что большее кольцо лежит ниже меньшего (на рисунке 62 $n = 3$). За один ход разрешается перенести одно кольцо с одного штырька на другой, при этом не разрешается большее кольцо класть на меньшее. Докажите, что наименьшее число ходов, за которое можно перенести все кольца с одного штырька на другой, равно $2^n - 1$.

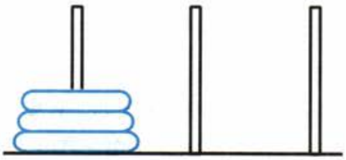


Рис. 62

2. Исторические сведения

Слово «прогрессия» латинское (progressio), оно означает «движение вперёд» (как слово «прогресс»).

С начала нашей эры известна следующая задача-легенда: «Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царём, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это „скромное" желание Сеты».

В задаче надо найти сумму 64 членов геометрической прогрессии

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \dots,\ 2^{63}$$

с первым членом 1 и знаменателем 2. Эта сумма равна

$$2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Такое количество зёрен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше поверхности Земли.

Задачи на геометрические и арифметические прогрессии встречаются у вавилонян, в египетских папирусах, в древнекитайском трактате «Математика в 9 книгах».

Так, в одной из клинописных табличек древних вавилонян предлагается найти сумму первых девяти членов геометрической прогрессии

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \dots,\ 2^{n-1},\ \dots .$$

Вот другая задача, которую решали в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до новой эры: «10 братьев, $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат над братом поднимается, на сколько поднимается, не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом — на сколько он выше?»

Здесь требуется по сумме первых десяти членов арифметической прогрессии $1\frac{2}{3}$ мины (1 мина = 60 шекелей) и известному восьмому члену определить разность арифметической прогрессии.

В папирусе Ахмеса предлагается задача: «У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из колоса может вырасти по семи мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Отметим также, что Архимед умел вычислять сумму любого числа членов геометрической прогрессии. Правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского.

П. Ферма

Формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии была известна П. Ферма (XVII в.).

В старорусском юридическом сборнике «Русская правда» (X—XI вв.) содержатся оценки количества зерна, собранного с определённого участка земли за определённое время; некоторые из них предполагают вычисление суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{3}{2}$.

Интересные задачи на прогрессии есть в «Арифметике» Магницкого. Вот одна из таких задач: «Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что за коня запрошена слишком большая цена. «Хорошо, — ответил продавец, — если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за одни гвозди в его подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку (0,25 копейки), за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь — четыре полушки и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше, чем за предыдущий». Купец же, думая, что заплатит намного меньше чем 1000 рублей, согласился. Проторговался ли купец, и если да, то на сколько?»

ГЛАВА 4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Материал этой главы не является обязательным для классов, не изучающих математику углублённо, он ещё встретится в 10 классе, но знание хотя бы несложных фактов и формул из этой главы облегчит дальнейшее изучение математики. Формулы тригонометрии необходимы не только для изучения курса алгебры (а в 10—11 классах — алгебры и начал математического анализа), они помогают лучше разобраться в вопросах геометрии и физики.

§ 9*. Угол и его мера

Слово «тригонометрия» греческое, оно переводится как «измерение треугольников». Как известно из геометрии, синус, косинус, тангенс и котангенс угла используются при решении треугольников, поэтому формулы для них называются тригонометрическими.

В курсе геометрии они рассматривалась для углов, не больших развёрнутого. В этой главе обобщено понятие угла и на него распространены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

9.1*. Понятие угла

Введём на плоскости прямоугольную систему координат xOy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и с положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх, и рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Пусть положительная полуось Ox пересекает окружность в точке A, и пусть на окружности дана ещё точка B. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ образуют угол AOB (рис. 63, a).

Будем считать, что наряду с фиксированными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ есть ещё вектор, начало которого — точка O, а конец — точка, движущаяся по окружности. Этот вектор назовём **подвижным вектором**.

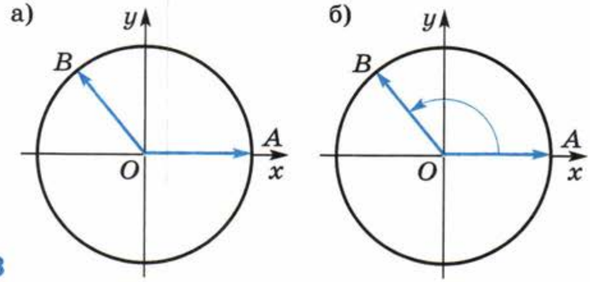


Рис. 63

Используя язык механики, можно сказать, что угол AOB получен поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$ (на рисунке 63, *б* стрелка показывает, как двигался подвижный вектор).

Принято считать, что любой поворот подвижного вектора образует угол.

Отметим, что угол AOB образован поворотом, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, прошёл дугу, не большую полуокружности (см. рис. 63, *б*).

Однако можно совершить и такой поворот, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, пройдёт дугу, большую чем полуокружность (рис. 64, *а*).

При повороте подвижного вектора может образоваться угол, меньший развёрнутого (см. рис. 63, *б*), и угол, больший развёрнутого (см. рис. 64, *а*).

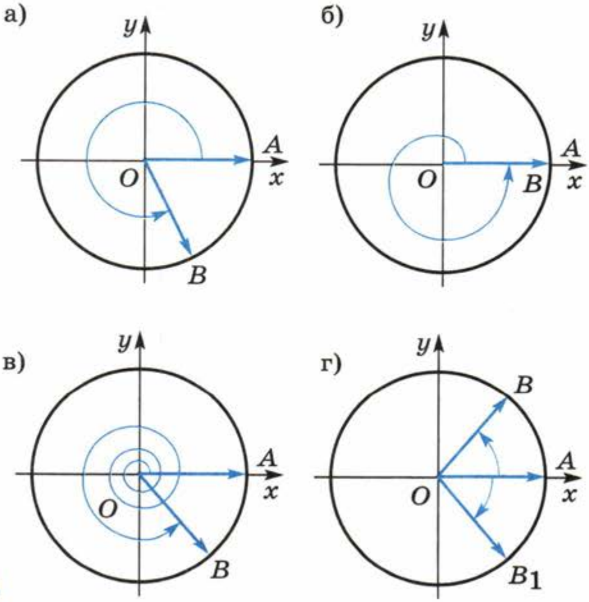


Рис. 64

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот, что впервые его конечное положение (вектор $\overrightarrow{OB}$) совпало с начальным положением (вектором $\overrightarrow{OA}$). Такой поворот называют **полным оборотом** (рис. 64, *б*).

Поворот подвижного вектора может складываться из нескольких полных оборотов и поворота, составляющего часть полного оборота (рис. 64, *в*).

Любой поворот подвижного вектора может быть совершён в двух противоположных направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки (рис. 64, *г*).

Принято считать углы, образованные поворотом подвижного вектора против часовой стрелки, **положительными**, а углы, образованные поворотом подвижного вектора по часовой стрелке, **отрицательными**.

Если подвижный вектор не совершил поворота, то будем считать, что образован **нулевой угол**.

517. а) Какой поворот называют полным оборотом?
б) Какой угол называют нулевым? положительным? отрицательным?

518. На рисунке 65 изображён угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$. Сколько полных оборотов содержит угол AOB?

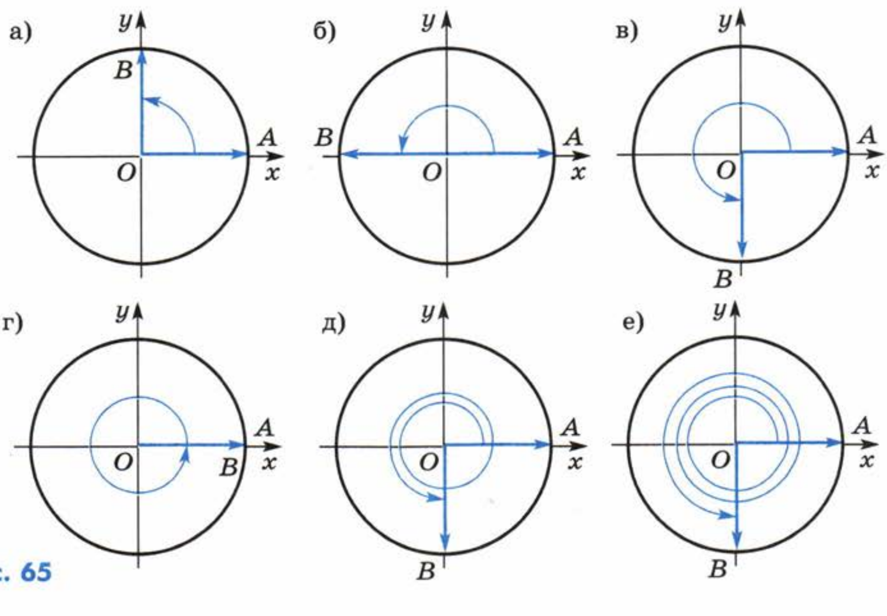


Рис. 65

519. Изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом против часовой стрелки подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$ на:

а) $\frac{1}{2}$ полного оборота; б) 0,25 полного оборота;

в) $\frac{3}{4}$ полного оборота; г) 1,75 полного оборота;

д) 1 полный оборот; е) 2,5 полного оборота.

9.2*. Градусная мера угла

Пусть подвижный вектор совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота против часовой стрелки. В этом случае говорят, что образован угол, **градусная мера** которого равна одному градусу, или, короче, угол в один **градус** (пишут: $1°$).

Следовательно, совершив полный оборот против часовой стрелки, получим угол в $360°$ (рис. 66, *а*), а совершив один полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-360°$ (рис. 66, *б*).

Совершив поворот в половину полного оборота против часовой стрелки, получим угол в $180°$ (рис. 67, *а*); совершив поворот в чет-

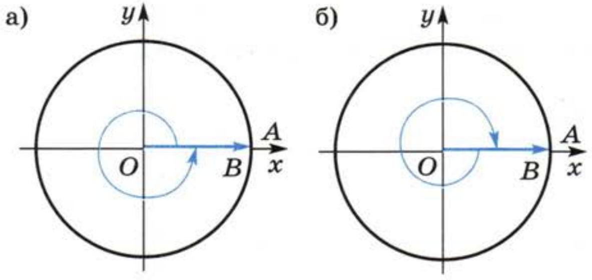


Рис. 66

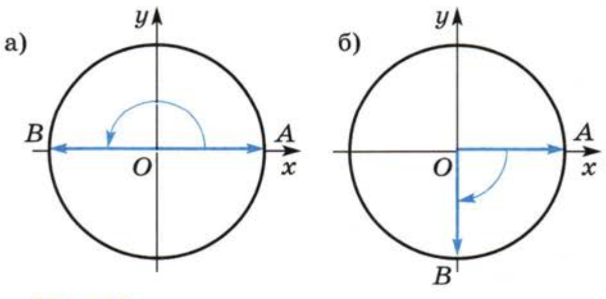


Рис. 67

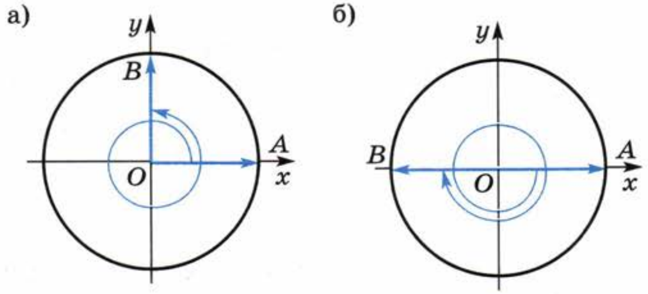


Рис. 68

верть полного оборота по часовой стрелке, получим угол в $-90°$ (рис. 67, *б*).

Поскольку

$$450° = 90° + 360°,$$

то, совершив поворот в четверть полного оборота против часовой стрелки, а затем ещё полный оборот против часовой стрелки, получим угол в $450°$ (рис. 68, *а*).

Поскольку $-540° = -180° - 360°$, то, совершив поворот в половину полного оборота по часовой стрелке, а затем ещё полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-540°$ (рис. 68, *б*).

Напомним, что $1'$ (одна минута) равна $\frac{1}{60}$ части градуса, а $1''$ (одна секунда) равна $\frac{1}{60}$ части минуты.

Для любого действительного числа a существует, и притом только один, угол, градусная мера которого равна a.

Отметим, что градусную меру любого угла a можно записать в виде

$$a = a_0 + 360° \cdot k,$$

где a_0 удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant a_0 < 360°$, а k — некоторое целое число.

Поэтому при $k \neq 0$ угол с градусной мерой a можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол с градусной мерой a_0 и 2) на $|k|$ полных оборотов в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном при $k < 0$.

Пример 1. Так как $2000° = 200° + 5 \cdot 360°$, то угол в $2000°$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на $200°$ и 2) в положительном направлении на 5 полных оборотов.

Пример 2. Так как $-2000° = 160° - 6 \cdot 360°$, то угол в $-2000°$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на $160°$ и 2) в отрицательном направлении на 6 полных оборотов.

Замечание. Из сказанного выше ясно, что только в случае, когда угол, рассматриваемый в тригонометрии, неотрицателен и не больше развёрнутого, его можно отождествить с углом, рассматриваемым в геометрии.

Поэтому введённое выше понятие угла является обобщением понятия угла, рассматриваемого в геометрии.

520. а) Что такое угол в один градус? Сколько градусов содержит полный оборот?

б) Для любого ли числа a существует угол, градусная мера которого равна a?

С помощью транспортира изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$ на угол, градусная мера которого равна **(521—522)**:

521. а) $60°$; б) $120°$; в) $200°$; г) $245°$;
д) $270°$; е) $300°$; ж) $380°$; з) $420°$.

522. а) $-45°$; б) $-30°$; в) $-120°$; г) $-160°$;
д) $-270°$; е) $-300°$; ж) $-500°$; з) $-1000°$.

523. Запишите градусную меру угла AOB, изображённого на рисунке 69.

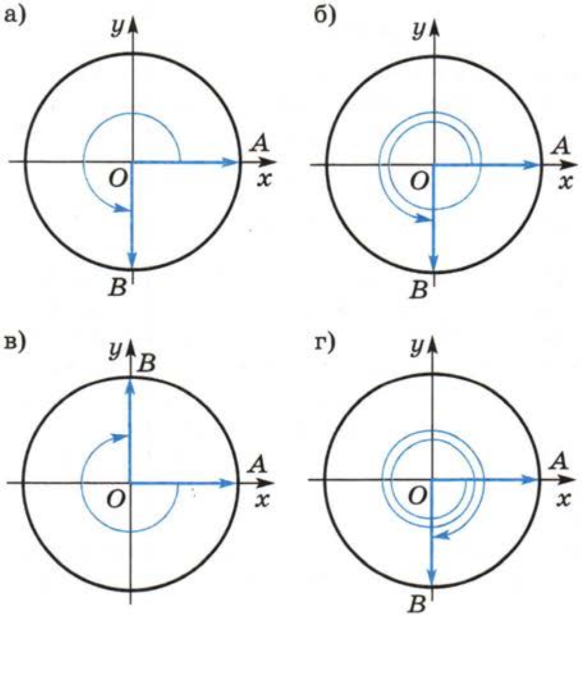


Рис. 69

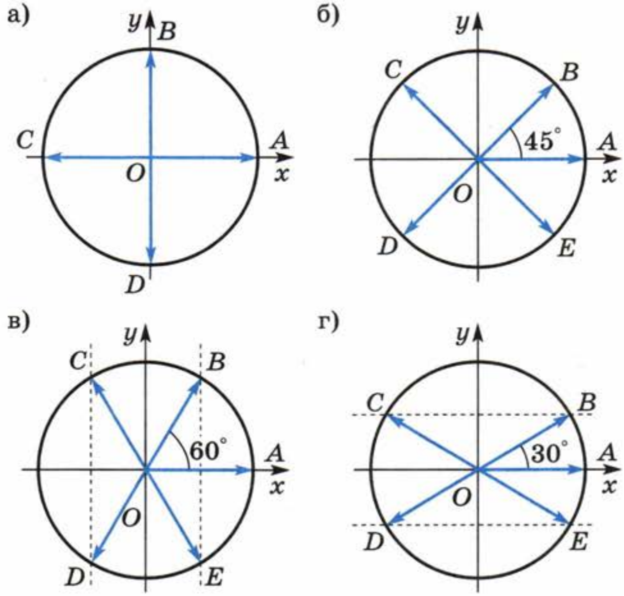


Рис. 70

524. Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, градусная мера которого равна:
а) $700°$; б) $-320°$; в) $2000°$; г) $3800°$;
д) $-600°$; е) $-800°$; ж) $-1500°$; з) $-2400°$?

525. а) Определите по рисунку 70, *а* наименьшую по абсолютной величине градусную меру углов AOB, AOC, AOD.
б) Определите по рисунку 70, *б—г* наименьшую по абсолютной величине градусную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE.

526. Постройте без помощи транспортира в координатной плоскости углы:
а) $90°$, $180°$, $270°$, $360°$; б) $45°$, $135°$, $225°$, $315°$;
в) $60°$, $120°$, $240°$, $300°$; г) $30°$, $150°$, $210°$, $330°$;
д) $-45°$, $-90°$, $-135°$, $-180°$; е) $-60°$, $-120°$, $-240°$, $-300°$.

527. Укажите несколько положительных и отрицательных углов, образованных такими поворотами, при каждом из которых угол между начальным и конечным положением подвижного вектора равен $30°$, $-45°$, $60°$, $-90°$.

528. Укажите наименьший по абсолютной величине угол среди данных углов:
а) $30° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$, б) $-120° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$;
в) $270° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$; г) $-270° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$;
д) $400° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$; е) $-700° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

529. Представьте следующие углы в виде $a + 360° \cdot n$, где $0 \leqslant a < 360°$, n — некоторое целое число:
а) $400°$; б) $-500°$; в) $600°$; г) $-900°$.

530. Запишите градусные меры всех углов AOB, AOC, AOD, AOE, изображённых на рисунке 70.
Например, все углы AOB равны $90° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 70, *а*).

9.3*. Радианная мера угла

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот против часовой стрелки, что его конец, двигаясь по окружности, прошёл расстояние, равное радиусу R этой окружности. Тогда говорят, что образован угол, **радианная мера** которого равна одному радиану, или, короче, угол в один **радиан** (пишут: 1 рад).

Можно также сказать, что радиан — это величина центрального угла окружности радиуса R, опирающегося на дугу длиной R. Из геометрии известно, что это определение не зависит от R. Поэтому обычно выбирают $R = 1$.

Поскольку длина окружности радиуса 1 равна 2π, то, совершив один полный оборот против часовой стрелки, получим угол в 2π рад. Следовательно, угол в 2π рад и угол в $360°$ — это один и тот же угол. Но тогда угол в $1°$ и угол в $\frac{2\pi}{360}$ рад $= \frac{\pi}{180}$ рад также один и тот же угол. Поэтому пишут: $360° = 2\pi$ рад,

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад},$$

$$-360° = -2\pi \text{ рад},$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45'' \approx 57{,}296°.$$

$$-5 \text{ рад} = -\frac{5}{\pi} \cdot 180° \approx -286°,$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{\circ}.$$

Слово «радиан» в таких записях обычно опускают, но подразумевают его. Например, пишут: $180° = \pi$, $-60° = -\frac{\pi}{3}$, $1 = \frac{180°}{\pi}$, $1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453\ldots$.

Поскольку

$$-\frac{7\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi - 2\pi,$$

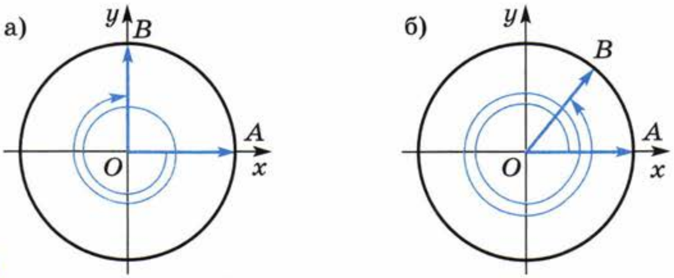


Рис. 71

то, совершив поворот в три четверти полного оборота по часовой стрелке, затем полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-\frac{7\pi}{2}$ (рис. 71, *а*).

Поскольку

$$\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi,$$

то, совершив поворот в восьмую часть полного оборота против часовой стрелки, а затем два полных оборота против часовой стрелки, получим угол в $\frac{17\pi}{4}$ (рис. 71, *б*).

Для любого действительного числа α существует, и притом только один, угол, радианная мера которого равна α радиан.

Условимся далее вместо слов «угол, радианная мера которого равна α радиан» говорить коротко «угол α».

Отметим, что любое действительное число α можно записать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где число α_0 удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, а k — некоторое целое число. Поэтому при $k \neq 0$ угол α можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол α_0 и 2) на $|k|$ полных поворотов (в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном направлении при $k < 0$).

Пример 1. Так как

$$\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi,$$

то угол $\frac{19\pi}{4}$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол $\frac{3\pi}{4}$ и 2) в положительном направлении на 2 полных оборота.

Пример 2. Так как

$$-\frac{11}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi,$$

то угол $-\frac{11}{2}\pi$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$ и 2) в отрицательном направлении на 3 полных оборота.

531. а) Что такое угол в 1 радиан?
б) Сколько радиан содержит полный оборот? половина полного оборота? четверть полного оборота?

532. Выразите в радианах величину угла, градусная мера которого равна:
а) 360°; 180°; 90°; 270°; 0°;
б) 45°; 135°; 225°; 315°;
в) 60°; 120°; 240°; 300°;
г) 30°; 150°; 210°; 330°;
д) –45°; –90°; –135°; –180°;
е) –270°; –360°; –1800°.

533. Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:
а) 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0;
б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$;
в) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$;
г) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$;
д) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{12}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{6}$;
е) $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

534. Считая, что $\pi \approx 3{,}14159$, определите приблизительно с недостатком с точностью до 0,01 радианную меру:
а) полного оборота;
б) половины полного оборота;
в) четверти полного оборота.

535. Известно, что 1 рад ≈ 57°. Изобразите на глаз угол в 1; 2; 3; 4; 5; 6 радиан. Проверьте свой глазомер, измерив построенные углы с помощью транспортира.

536. Какой угол больше:
а) в 3 радиана или в π радиан;
б) в 6 радиан или в 2π радиан?

537. Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, радианная мера которого равна:
а) 4π; -6π; 12π; -7π;
б) $-0{,}5\pi$; $3\frac{1}{3}\pi$; $-13{,}2\pi$; $21{,}7\pi$?

538. Назовите несколько положительных и отрицательных углов, образованных такими поворотами, при каждом из которых угол между начальным и конечным положениями подвижного вектора равен:
а) $\frac{\pi}{6}$;
б) $\frac{\pi}{3}$;
в) $-\frac{\pi}{4}$;
г) $-\frac{\pi}{2}$.

539. Запишите в виде $\alpha + 2\pi \cdot n$, где n — некоторое целое число ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$), следующие числа:

а) $6{,}5\pi$; б) $\frac{9}{2}\pi$; в) $-12\frac{1}{3}\pi$; г) $-17\frac{1}{6}\pi$.

540. По рисунку 70 определите:
а) наименьшую положительную; наименьшую по абсолютной величине радианную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE;
б) радианную меру всех углов AOB, AOC, AOD, AOE.

541. а) Постройте окружность радиуса 5 см с центром в начале системы координат. Точку её пересечения с положительной полуосью Ox обозначьте A_0. Считая $\overrightarrow{OA_0}$ начальным положением подвижного вектора, постройте (с помощью транспортира) вектор $\overrightarrow{OA_\alpha}$, где α — градусная мера угла поворота подвижного вектора. Выполните задание при α, равном 0°; 30°; 45°; 60°; 90°.
б) Постройте точки, симметричные точкам A_α относительно оси Ox; оси Oy; начала системы координат. Определите угол поворота, при котором точка A_α переходит в построенную точку.

§ 10*. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

10.1*. Определение синуса и косинуса угла

Далее рассматривается прямоугольная система координат xOy, у которой положительная полуось Ox направлена вправо, а положительная полуось Oy направлена вверх. Напомним, что единичным вектором координатной оси Ox называется вектор, имеющий длину 1, начало в точке O и направленный вдоль положительной полуоси Ox.

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy при условии, что единичный вектор $\overrightarrow{OA}$ оси Ox принят за начальное положение подвижного вектора и что направление поворота против часовой стрелки принято за положительное.

Пусть подвижный вектор, совершив поворот от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$, образует угол AOB, радианная мера которого равна α радиан. Точку B единичной окружности назовём точкой, соответствую-

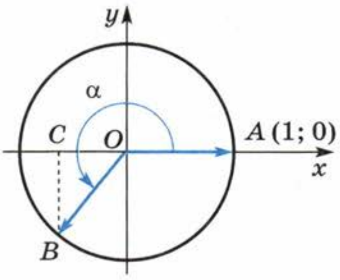


Рис. 72

щей углу α (рис. 72); отметим, что точка B соответствует также любому углу $\alpha + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют **синусом угла** α и обозначают $\sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha = y$.

Число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют **косинусом угла** α и обозначают $\cos\alpha$, т. е. $\cos\alpha = x$.

Замечание. Для углов, радианная мера которых заключена между 0 и π, приведённые определения синуса и косинуса угла совпадают с определениями, известными из курса геометрии.

Из сказанного следует, что для любого угла α:

а) существует синус этого угла, и притом единственный;

б) существует косинус этого угла, и притом единственный.

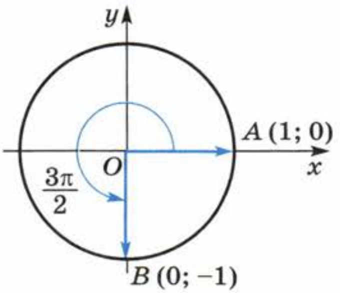


Рис. 73

Пример 1. Вычислим: $\sin 0$ и $\cos 0$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\frac{3\pi}{2}$.

Углу поворота 0 радиан соответствует точка $A(1;\ 0)$ (рис. 73), следовательно, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Углу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка $B(0;\ -1)$ (рис. 73), следовательно, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Пример 2. Вычислим: $\sin\frac{5\pi}{4}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

Так как $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, то, опустив из точки B, соответствующей углу $\frac{5\pi}{4}$, перпендикуляр BC на ось Ox (см. рис. 72), получим, что в прямоугольном треугольнике BCO угол COB равен $\frac{\pi}{4} = 45°$, но тогда треугольник BCO равнобедренный, т. е. $BC = OC$. Так как $OB = 1$, то, используя теорему Пифагора, получим, что $BC = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как точка $B(x;\ y)$ находится в третьей четверти, то обе её координаты отрицательны, следовательно, $x = -OC$, $y = -BC$, т. е. точка B имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Так как точка B соответствует углу $\frac{5\pi}{4}$, то $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

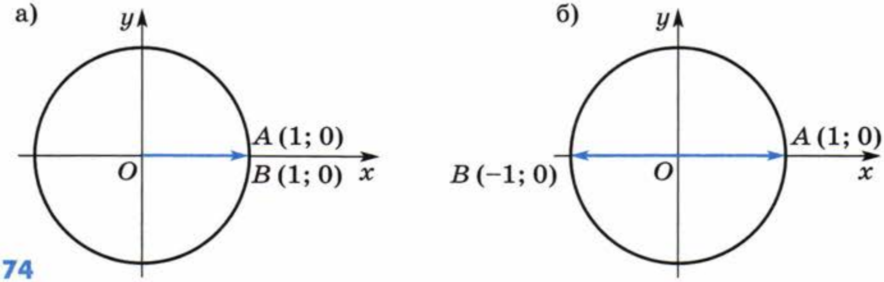


Рис. 74

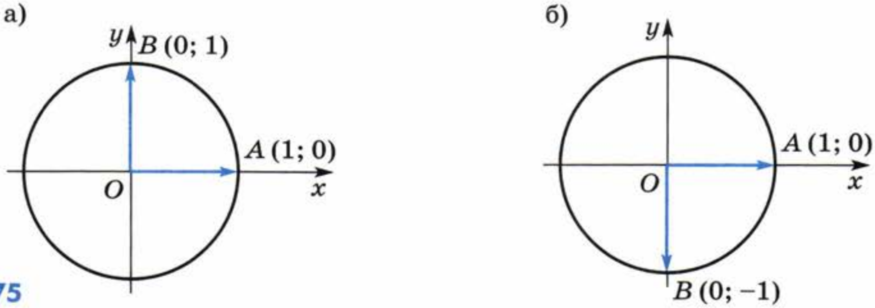


Рис. 75

Пример 3. Найдём все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$.

Из определения синуса угла следует (рис. 74), что $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$, $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$, $\sin 3\pi = 0$, $\sin(-3\pi) = 0$, ..., т. е.

$$\sin k\pi = 0$$

для любого целого числа k.

Таким образом, $\sin\alpha = 0$ для углов $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $k\pi$, $\sin\alpha \neq 0$.

Пример 4. Найдём все углы α, для каждого из которых $\cos\alpha = 0$.

Из определения косинуса угла следует (рис. 75), что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$, ..., т. е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

для любого целого числа k.

Таким образом, $\cos\alpha = 0$ для углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos\alpha \neq 0$.

Из геометрии уже известны синусы и косинусы углов: $0 = 0°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$. Ниже приводится таблица синусов и косинусов этих углов.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Для других углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, их синусы и косинусы можно находить приближённо с помощью специальных тригонометрических таблиц или электронных калькуляторов.

В следующем пункте будут получены формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. С их помощью вычисление косинусов и синусов любых углов можно свести к вычислению косинуса или синуса некоторого угла, радианная мера которого заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

542. а) Что в тригонометрии называют единичной окружностью?
б) Какую точку единичной окружности называют точкой, соответствующей углу α?
в) Что называют синусом угла α? косинусом угла α?
г) Для какого угла α существует $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?
д) Для данного угла α единственен или нет $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?

543. а) Постройте единичную окружность.
б) Какой вектор принимается за начальное положение подвижного вектора?
в) Какое направление поворота принято за положительное?

544. Для каких углов α: а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$?

545. Найдите:
а) $\sin 0°$; б) $\cos 0$; в) $\sin 90°$; г) $\cos\frac{\pi}{2}$;
д) $\sin 180°$; е) $\cos\pi$; ж) $\sin 270°$; з) $\cos 270°$;
и) $\sin 2\pi$; к) $\cos 360°$; л) $\cos 0°$; м) $\sin\frac{\pi}{2}$.

546. Используя свойства прямоугольных треугольников, найдите:
а) $\sin 45°$; б) $\cos\frac{\pi}{4}$; в) $\sin\frac{\pi}{4}$; г) $\cos 30°$; д) $\sin 60°$; е) $\cos\frac{\pi}{3}$.

Построив угол, вычислите (**547—549**):

547. а) $\sin 120°$; б) $\cos \frac{2\pi}{3}$; в) $\sin 135°$; г) $\cos \frac{3\pi}{4}$;

д) $\sin \frac{5\pi}{6}$; е) $\cos 150°$; ж) $\sin \pi$; з) $\cos 180°$.

548. а) $\sin 225°$; б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\sin(-\pi)$;

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos \frac{3\pi}{2}$.

549. а) $\sin \frac{11\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; в) $\sin \frac{7\pi}{3}$; г) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

550. На миллиметровой бумаге постройте систему координат с единичным отрезком 10 см. Постройте окружность с центром в начале координат, проходящую через точку (1; 0). Найдите приближённо (с точностью до сотых):

а) $\sin 30°$; б) $\cos 60°$; в) $\sin 150°$;
г) $\cos 150°$; д) $\sin 190°$; е) $\cos 250°$;
ж) $\sin 250°$; з) $\cos 300°$; и) $\sin 300°$.

551. а) На единичной окружности постройте точки A_α, соответствующие углам α, равным 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

б) Постройте точки, симметричные точкам A_α относительно оси Ox; оси Oy; начала системы координат.

в) Определите радианную меру углов, которым соответствуют построенные точки.

552. Найдите синусы и косинусы следующих углов (k — любое целое число):

а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $\pi + 2\pi k$; г) $-\pi + 2\pi k$;

д) $2\pi k$; е) $4\pi k$; ж) πk; з) $-\pi k$;

и) $\frac{\pi}{2}$; к) $-\frac{\pi}{2}$; л) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; м) $-\frac{\pi}{2} + \pi k$.

553. Верно ли равенство:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$?

554. а) Отметьте на единичной окружности примерное положение точек, соответствующих углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Определите с точностью до 0,1 значения синусов и косинусов этих углов.

555. **Исследуем.** Если отмечать на единичной окружности точки, соответствующие углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, ..., могут ли какие-нибудь из этих точек совпасть?

556. Определите знак числа:

а) $\sin 4$; б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\cos(-4)$.

557. Выполняется ли равенство $\cos\alpha = \sin\alpha$ при каком-нибудь α? Проиллюстрируйте своё решение на рисунке.

558. Отметьте на единичной окружности точки, соответствующие углам α, для которых:

а) $\cos\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$;
в) $\sin\alpha \leqslant 0$; г) $\sin\alpha \geqslant 0$.

Что больше **(559—560)**:

559. а) $\sin 40°$ или $\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$ или $\cos 60°$;

в) $\sin 120°$ или $\sin 130°$; г) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\pi$;

д) $\sin 300°$ или $\sin 130°$; е) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\frac{\pi}{2}$;

ж) $\sin(-300°)$ или $\cos 120°$; з) $\cos\frac{13\pi}{4}$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$?

560. а) $\sin 3$ или $\sin\pi$; б) $\cos 4$ или $\cos 5$;
в) $\sin 1$ или $\sin(-1)$; г) $\cos(-2)$ или $\cos 2$?

561. Определите знак произведения:

а) $\cos 130° \cdot \sin 170°$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$;

в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\cos\frac{11}{4}\pi\cdot\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

Вычислите **(562—563)**:

562. а) $3\cos 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} - 7\sin(-\pi)$;

б) $\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + 4\cos(-2\pi) - 2\sin(-3\pi)$.

563. а) $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\frac{5\pi}{6}$;

б) $3\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3} + 7\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

564. **Доказываем.** Докажите, что если точка A_α единичной окружности соответствует некоторому рациональному числу, то она не соответствует никакому другому рациональному числу.

10.2*. Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

Теорема 1

Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Это равенство называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Доказательство. Как известно, окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Как следует из определения синуса и косинуса угла α, точка $B(x;\, y)$, принадлежащая этой окружности и соответствующая углу α, имеет координаты

$$x = \cos\alpha,\ \ y = \sin\alpha, \qquad (3)$$

которые удовлетворяют уравнению (2). Подставляя их значения в уравнение (2), получим равенство (1).

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Вычислим $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\pi;\, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Следствие

Для любого угла α справедливы неравенства

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \quad |\cos\alpha| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Действительно, так как $\cos^2\alpha \geqslant 0$ для любого угла α, то

$$\sin^2\alpha \leqslant \sin^2\alpha + \cos^2\alpha,$$

откуда, применяя основное тригонометрическое тождество, получим, что $\sin^2\alpha \leqslant 1$ или $|\sin\alpha| \leqslant 1$.

Аналогично доказывается справедливость неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$. Заметим, что неравенства (4) можно записать так:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Теорема 2

Для любого угла α справедливы равенства

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha. \end{aligned} \qquad (5)$$

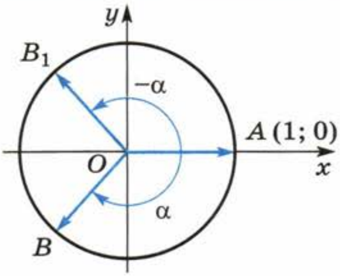


Рис. 76

Доказательство. Точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $(-\alpha)$, симметричны (рис. 76) относительно оси Ox. Поэтому абсциссы этих точек равны, а ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т. е. ординаты — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (5).

Теорема 2 доказана.

Пример 2.

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; б) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теорема 3

Для любого угла α и любого целого числа k справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha, \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (6)$$

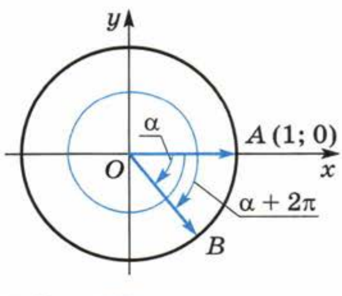


Рис. 77

Доказательство. Углам α и $\alpha + 2k\pi$ соответствует одна и та же точка B (рис. 77) единичной окружности. Поэтому справедливы равенства (6).

Теорема 3 доказана.

Пример 3.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

в) $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$;

г) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Равенства (1), (5) и (6) называют **основными формулами** для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

В дальнейшем нам понадобятся ещё следующие формулы:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (7)$$

Покажем, что эти равенства справедливы для любого угла α. Действительно, точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $(\alpha + \pi)$, симметричны относительно начала координат. Поэтому абсциссы и ординаты этих точек — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (7) (рис. 78).

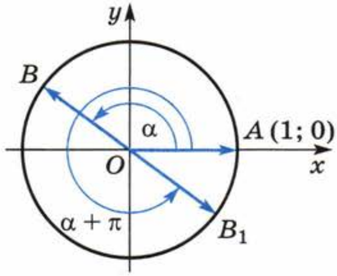


Рис. 78

Пример 4.

а) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

565. Запишите основное тригонометрическое тождество.

566. Укажите наибольшее и наименьшее значения:
а) $|\sin\alpha|$; б) $|\cos\alpha|$.

567. а) Каковы основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
б) Какие знаки имеют синус и косинус угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена в I четверти? во II четверти? в III четверти? в IV четверти?

568. Существует ли такой угол α, для которого:

а) $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; г) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$?

569. Возможно ли равенство:

а) $\sin\alpha = -\sqrt{3}$; б) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$; в) $\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$;

г) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{3}$; д) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$; е) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{3}$?

570. Вычислите $\sin\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

571. Вычислите $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $\sin\alpha = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Упростите выражение (572—575):

572. а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha$;
в) $\sin^2\alpha - 1$; г) $\cos^2\alpha - 1$.

573. а) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)$; б) $(\cos\alpha - 1)(1 + \cos\alpha)$;
в) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; г) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

574[1]**.** а) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$; б) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$;
в) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; г) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$,

где угол α такой, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

575. а) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$;
в) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

576. Может ли синус или косинус угла принимать значения, по абсолютной величине большие единицы?

577. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = 1 + b$, то какие значения может принимать b? Определите $\cos\alpha$.

578. Может ли косинус угла быть равным:

а) $-\frac{21}{37}$; б) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$;

в) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$; г) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}$?

---

[1] Здесь и далее рассматриваются выражения, имеющие смысл.

579. Вычислите:

а) $6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$;

б) $3\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) - 4\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) + 5\sin(7\pi) + \cos(-11\pi)$.

580. Определите знак произведения:
а) $\sin 157° \sin 275° \sin(-401°) \sin 910° \sin 328°$;
б) $\cos 73° \cos 140° \cos 236° \cos 301° \cos(-384°) \cos 1000°$.

581. Найдите все углы α из интервала $(0;\ 2\pi)$, для каждого из которых справедливо равенство:
а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

582. Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\sin(-55°)$, $\sin 600°$, $\sin 1295°$;
б) $\cos 653°$, $\cos(-68°)$, $\cos 295°$.

Сравните **(583—585)**:

583. а) $\sin 91°$ и $\sin 92°$; б) $\sin 195°$ и $\sin 200°$;
в) $\sin 354°$ и $\sin 959°$; г) $\sin 734°$ и $\sin(-1066°)$.

584. а) $\cos 101°$ и $\cos 157°$; б) $\cos 190°$ и $\cos 200°$;
в) $\cos 1000°$ и $\cos 2000°$; г) $\cos 860°$ и $\cos 510°$.

585. а) $\cos 1{,}6\pi$ и $\cos 1{,}68\pi$; б) $\sin 4{,}5$ и 0;
в) $\cos 5{,}1\pi$ и $\cos 5\pi$; г) $\sin 1$ и $\cos 1$.

586. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:
а) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;
в) $\sin(3\pi - \alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(5\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

587. Упростите выражение:
а) $\sin(-\alpha + \pi)$; б) $\cos(\alpha - \pi)$; в) $\sin(\alpha + 7\pi)$; г) $\cos(\alpha - 9\pi)$.

588. Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 8\pi\right)$; в) $\sin\left(9\frac{5}{6}\pi\right)$.

589. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\alpha - \pi)\cos(\alpha + \pi)}$; б) $\frac{\cos(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\sin(\alpha - \pi)\sin(\pi + \alpha)}$;

в) $\sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha + \pi) - \cos(\pi + \alpha)\cos(\alpha - \pi)$;
г) $\sin(2\pi + \alpha)\sin(3\pi - \alpha) - \cos(3\pi + \alpha)\cos(\alpha - 2\pi)$,
где угол α такой, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

590. Для любого ли угла α справедливо равенство:
а) $\cos\alpha = \cos|\alpha|$; б) $\sin\alpha = \sin|\alpha|$?

10.3*. Тангенс и котангенс угла

Число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, называют **тангенсом угла** α и обозначают $\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.} \tag{1}$$

Тангенс угла α определён для всех углов α, за исключением тех, для которых $\cos\alpha$ равен нулю. Поэтому в определении $\operatorname{tg}\alpha$ должны быть исключены все углы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{2}$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, не совпадающего ни с одним из углов (2), тангенс этого угла существует, и притом единственный.

Число, равное отношению $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$, называют **котангенсом угла** α и обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.} \tag{3}$$

Котангенс угла α определён для всех углов α, за исключением тех, для которых $\sin\alpha$ равен нулю. Поэтому в определении $\operatorname{ctg}\alpha$ должны быть исключены все углы

$$\alpha = k\pi, \tag{4}$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, не совпадающего ни с одним из углов (4), котангенс этого угла существует, и притом единственный.

Из равенств (1) и (3) следует справедливость равенства

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1} \tag{5}$$

для всех углов α, для которых существуют одновременно и $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Левая часть равенства (5) существует для всех углов, за исключением тех, для которых или $\sin\alpha = 0$, или $\cos\alpha = 0$, поэтому формула (5) справедлива для всех углов, кроме углов $\alpha = \frac{\pi}{2}k$, где k — любое целое число.

Из определения тангенса и котангенса угла следует, например, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1,\ \operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

Тангенс угла $\frac{\pi}{2}$ не существует, потому что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, но существует котангенс угла $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Для угла в 0 радиан, наоборот, не существует котангенс, потому что $\sin 0 = 0$, но существует тангенс:

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Основными формулами для $\operatorname{tg}\alpha$ являются следующие:

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha,} \quad (7)$$

где n — любое целое число.

Конечно, равенства (6) и (7) верны только для таких углов α, для которых одновременно имеют смысл правые и левые части равенств.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. для угла, отличного от угла $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число, имеют смысл и $\operatorname{tg}(-\alpha)$, и $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$. Покажем справедливость равенств (6) и (7) для любого такого угла α. Используя формулы для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — чётное число, т. е. $n = 2l$, где l — целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2l\pi) = \frac{\sin(\alpha + 2l\pi)}{\cos(\alpha + 2l\pi)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — нечётное число, т. е. $n = 2l + 1$, где l — целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi + 2l\pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2l\pi)}{\cos(\alpha + \pi + 2l\pi)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, равенство (7) доказано для любого целого числа n.

Пример 1.

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1;$ б) $\operatorname{tg}(-60°) = -\operatorname{tg}60° = -\sqrt{3};$

в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

г) $\operatorname{tg}150° = \operatorname{tg}(-30° + 180°) = \operatorname{tg}(-30°) = -\operatorname{tg}30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Основными формулами для $\operatorname{ctg}\alpha$ являются следующие:

$$\mathbf{ctg}(-\alpha) = -\mathbf{ctg}\,\alpha, \tag{8}$$
$$\mathbf{ctg}(\alpha + \pi n) = \mathbf{ctg}\,\alpha, \tag{9}$$

где n — любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых одновременно имеют смысл правые и левые их части.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. для углов, отличных от угла $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число, имеют смысл и $\operatorname{ctg}(-\alpha)$, и $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$. Доказательство справедливости равенств (8) и (9) для любого такого угла α аналогично доказательству равенств (6) и (7).

Пример 2.

а) $\operatorname{ctg}(-45°) = -\operatorname{ctg}45° = -1;$ б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$

в) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;$

г) $\operatorname{ctg}135° = \operatorname{ctg}(-45° + 180°) = \operatorname{ctg}(-45°) = -\operatorname{ctg}45° = -1.$

591. а) Что называют тангенсом угла α? котангенсом угла α?
б) Для какого угла α не существует $\operatorname{tg}\alpha$? $\operatorname{ctg}\alpha$?
в) Для каких углов α справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$?

592. а) Если для угла α существует $\operatorname{tg}\alpha$, то единственный ли он?
б) Если для угла α существует $\operatorname{ctg}\alpha$, то единственный ли он?

593. Каковы основные формулы для $\operatorname{tg}\alpha$? для $\operatorname{ctg}\alpha$? Для каких углов α они справедливы?

Найдите (594—595):

594. а) $\operatorname{tg}0°$; б) $\operatorname{tg}\pi$; в) $\operatorname{tg}3\pi$; г) $\operatorname{tg}1440°$;
д) $\operatorname{tg}30°$; е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; ж) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; з) $\operatorname{tg}90°$.

595. а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg}270°$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

г) $\operatorname{ctg}90°$; д) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; е) $\operatorname{ctg}45°$;

ж) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; з) $\operatorname{ctg}0$.

596. Какие знаки имеют тангенс и котангенс угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена в I четверти? во II четверти? в III четверти? в IV четверти?

597. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg}71°\operatorname{tg}139°\operatorname{tg}235°\operatorname{tg}304°\operatorname{tg}(-393°)\operatorname{tg}1000°$;

б) $\operatorname{ctg}282°\operatorname{ctg}(-401°)\operatorname{ctg}(-910°)\operatorname{ctg}140°\operatorname{ctg}240°$;

в) $\cos 1 \sin 3 \operatorname{tg}4 \operatorname{ctg}5 \operatorname{tg}2 \operatorname{tg}6$;

г) $\operatorname{tg}1{,}5 \operatorname{ctg}4{,}5 \operatorname{tg}(-3{,}1)\operatorname{ctg}(-3{,}1)$;

д) $\dfrac{\sin 6 + \cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)\cdot\operatorname{ctg}(-4)}$;

е) $\dfrac{\sin(-8) + \cos 9}{\cos 11\cdot\operatorname{tg}(-9)}$.

598. **Доказываем.** Для всех α, при каждом из которых правая и левая части равенства имеют смысл, докажите справедливость равенства:

а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

599. Вычислите:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha = -0{,}6$;

г) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\sin\alpha = -0{,}8$;

д) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$;

е) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;

ж) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

з) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Упростите выражение (600—602):

600[1]**.** а) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

г) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; д) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$; е) $1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

ж) $\dfrac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}$; з) $\dfrac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta}$.

601. а) $\sin\beta\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin\beta:\tau\gamma\beta$; г) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

д) $\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$; е) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

ж) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; з) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

602. а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\sin^2\beta+\operatorname{tg}^2\beta-\dfrac{1}{\cos^2\beta}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$;

д) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; е) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

603. Доказываем. Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, где k — некоторое целое число;

б) $\dfrac{\cos\beta+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta}=1+\sin\beta$ при $\beta\neq\pi k$, где k — некоторое целое число.

Упростите выражение (604—606):

604. а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)-\operatorname{tg}(\beta+2\pi)}{\operatorname{ctg}(-\beta)-\operatorname{ctg}(-\alpha)}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha+3\pi)-\operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}$.

605. а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha-2\pi)}{\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cos(\alpha-5\pi)\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)}$.

606. а) $\dfrac{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1}$; б) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$.

---

[1] В заданиях 600—606 углы α и β таковы, что данные числовые выражения имеют смысл.

Дополнения к главе 4

1. Косинус разности и косинус суммы двух углов

Теорема 1

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \quad (1)$$

Это равенство называют **формулой косинуса разности двух углов**.

Теорему 1 можно сформулировать так: косинус разности двух углов равен произведению косинуса первого угла и косинуса второго плюс произведение синуса первого угла и синуса второго.

Доказательство. Пусть даны два угла α и β, точка B на единичной окружности соответствует углу α, а точка C — углу β (рис. 79). Тогда, используя определение синуса и косинуса угла, получаем, что точка B имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, а точка C — координаты $x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ имеет координаты $(\cos\beta; \sin\beta)$.

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \quad (2)$$

Но, как известно из геометрии, скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим через γ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, получаем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\gamma. \quad (3)$$

Отметим, что в геометрии под углом между векторами понимают неотрицательный угол из промежутка от 0 до π. Поэтому

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

Запишем углы α и β в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi, \quad \beta = \beta_0 + 2l\pi,$$

где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_0 < 2\pi$, а k и l — некоторые целые числа. Тогда можно считать, что точка B соответствует углу α_0, а точка C — углу β_0.

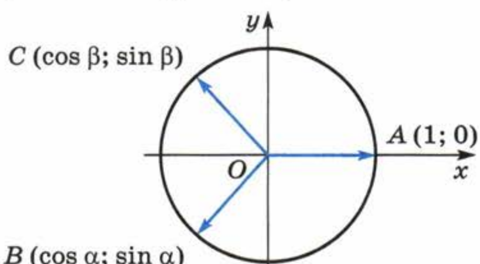


Рис. 79

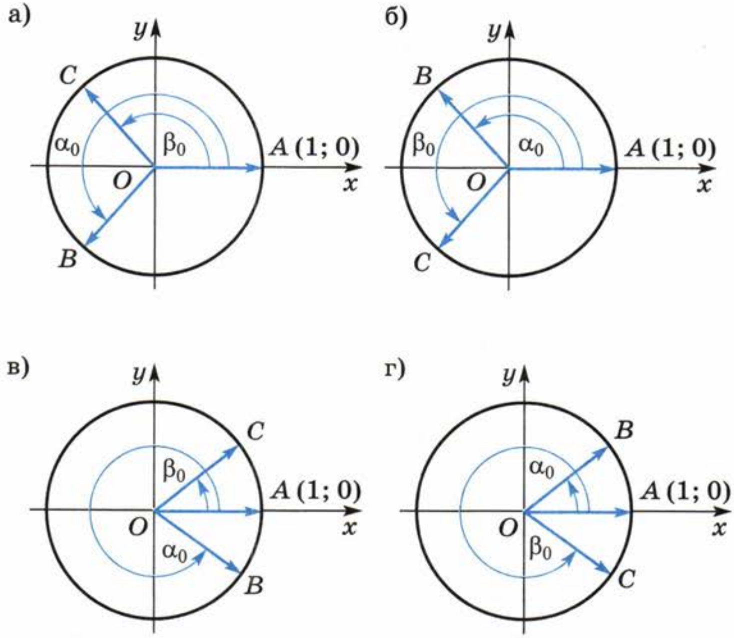


Рис. 80

Легко видеть, что либо $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$, либо $\gamma = \beta_0 - \alpha_0$, либо $\gamma = 2\pi - (\alpha_0 - \beta_0)$, либо $\gamma = 2\pi - (\beta_0 - \alpha_0)$ (рис. 80), но в любом из этих случаев

$$\cos\gamma = \cos(\alpha_0 - \beta_0).$$

Так как

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2(k - l)\pi) = \cos(\alpha_0 - \beta_0),$$

то получаем, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\gamma. \tag{4}$$

Теперь из равенств (4), (3) и (2) следует, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Теорема 2

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Это равенство называют **формулой косинуса суммы двух углов.**

Теорему 2 можно сформулировать так: косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла и косинуса второго минус произведение синуса первого угла и синуса второго.

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 2.

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

607. Запишите формулу: а) косинуса разности двух углов; б) косинуса суммы двух углов.

Вычислите, не пользуясь таблицей или калькулятором **(608—610)**:

608. а) $\cos 15°$; б) $\cos 75°$; в) $\cos 105°$.

609. а) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin 10° \sin 70° + \cos 70° \cos 10°$.

610. а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$.

611. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

612. Вычислите $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

613. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$.

614. а) Вычислите $\cos(\alpha - \beta)$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{4}$.

б) Вычислите $\cos(\alpha + \beta)$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ и $\cos\alpha = -0{,}8$, $\sin\beta = 0{,}2$.

615. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos 2^\circ \cos 28^\circ - \sin 28^\circ \sin 2^\circ}{\cos 47^\circ \cos 2^\circ + \sin 47^\circ \sin 2^\circ}$; б) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}}$.

616. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$; б) $\dfrac{\sin\alpha \sin\beta - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta}$,

где углы α и β такие, что знаменатель не обращается в нуль.

Вычислите **(617—618)**:

617. а) $\cos\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\cos\frac{7\pi}{12}$; г) $\cos\frac{11\pi}{12}$.

618. а) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$.

Упростите выражение **(619—620)**:

619. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\alpha$.

620. а) $\cos^2(60^\circ + \beta) + \cos^2(60^\circ - \beta) + \cos^2\beta$;

б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\alpha$.

621. а) Косинус острого угла равен 0,2. Найдите косинус смежного угла.

б) Синус острого угла равен $\frac{1}{3}$. Найдите синус смежного угла.

622. а) Найдите $\cos\alpha\cos\beta$, если $\cos(\alpha + \beta) = 0{,}2$, $\cos(\alpha - \beta) = 0{,}5$.

б) Найдите $\sin\alpha\sin\beta$, если $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}$.

623. а) Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = -\frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найдите наименьшее по абсолютной величине значение $(\alpha+\beta)$.

б) Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = -1$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите наименьшее по абсолютной величине значение $(\alpha-\beta)$.

2. Формулы для дополнительных углов

Два угла α и β, составляющие в сумме $\frac{\pi}{2}$, называют **дополнительными углами**.

Теорема 1

Для любого угла α справедливы равенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha. \tag{2}$$

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha,$$

и формула (1) тем самым доказана.

Теперь докажем формулу (2), используя уже доказанную формулу (1). Обозначим $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, тогда по формуле (1)

$$\sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right). \tag{3}$$

Теперь, подставляя в формулу (3) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ вместо β, получим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Пример. $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$.

624. **Доказываем.** Докажите формулу:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Упростите выражение (**625—626**):

625. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$; д) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

626. а) $\sin(\pi-\alpha)$; б) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$.

627. Приведите числовое выражение к виду синуса или косинуса положительного угла, не превышающего $45°$:
а) $\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \ldots$; б) $\sin 70°$; в) $\cos 82°$.

628. Приведите числовое выражение к виду синуса или косинуса положительного угла, не превышающего $\frac{\pi}{4}$:

а) $\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$; в) $\sin\frac{5\pi}{7}$; г) $\cos\frac{6\pi}{13}$.

3. Синус суммы и синус разности двух углов

Теорема 1

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой синуса суммы двух углов.**

Теорему 1 можно сформулировать так: синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла и косинуса второго плюс произведение косинуса первого угла и синуса второго.

Доказательство. Используя формулы для дополнительных углов и формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Вычислим $\sin 75°$ без таблиц и калькулятора:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Теорема 2

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta. \qquad (2)$$

Это равенство называют **формулой синуса разности двух углов.**

Теорему 2 можно сформулировать так: синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла и косинуса второго минус произведение косинуса первого угла и синуса второго.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \\ = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 2. Вычислим $\sin 15°$ без таблиц и калькулятора:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

629. Запишите формулу:
а) синуса суммы двух углов;
б) синуса разности двух углов;
в) косинуса суммы двух углов;
г) косинуса разности двух углов.

Доказываем. Докажите справедливость равенства **(630—631)**:

630. а) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; б) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;
в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$.

631. а) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$; б) $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$.

Вычислите **(632—633)**:

632. а) $\sin 20° \cos 10° + \cos 20° \sin 10°$; б) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$;
в) $\cos 80° \sin 10° + \sin 80° \cos 10°$; г) $\cos\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$.

633. а) $\sin 150°$; б) $\sin 105°$; в) $\sin 165°$; г) $\sin 195°$.

Упростите выражение **(634—635)**:

634. а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

635. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$; г) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

636. Вычислите:

а) $\sin(\alpha + \beta)$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$;

б) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha = -0{,}2$, $\cos\beta = -0{,}1$.

637. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:

а) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

4. Сумма и разность синусов и косинусов

Теорема 1

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Это равенство называют **формулой суммы синусов.**

Теорему 1 иначе можно сформулировать так: сумма синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов и косинуса их полуразности.

Теорема 2

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Это равенство называют **формулой разности синусов.**

Теорему 2 ещё можно сформулировать так: разность синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов и косинуса их полусуммы.

Теорема 3

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Это равенство называют **формулой суммы косинусов.**

Теорему 3 можно сформулировать и так: сумма косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов и косинуса их полуразности.

Теорема 4

Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Это равенство называют **формулой разности косинусов.**

Теорему 4 можно сформулировать так: разность косинусов любых двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов и синуса их полуразности.

Здесь под разностью углов понимается такая разность, когда из угла, стоящего на месте уменьшаемого, вычитается угол, стоящий на месте вычитаемого.

Доказательство теорем 1, 2, 3, 4. Положим:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

тогда $\alpha = x + y, \quad \beta = x - y.$

Используя формулы косинуса суммы, косинуса разности, синуса суммы и синуса разности, получаем

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = (\sin x\cos y + \cos x\sin y) +$$
$$+ (\sin x\cos y - \cos x\sin y) = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y =$$
$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Теоремы 1, 2, 3 и 4 доказаны.

Пример. Вычислим:

а) $\sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12} = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

638. Запишите формулу:
а) суммы синусов; б) разности синусов;
в) суммы косинусов; г) разности косинусов.

Представьте в виде произведения (**639—642**):

639. а) $\sin 20° + \sin 10°$; б) $\sin 60° - \sin 30°$;
в) $\cos 70° + \cos 20°$; г) $\cos 80° - \cos 30°$.

640. а) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{4}$; б) $\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{3}$;
в) $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}$; г) $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5}$.

641. а) $\sin\alpha + \sin 3\alpha$; б) $\cos 3\alpha - \cos\alpha$;
в) $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha$; г) $\cos 7\alpha + \cos\alpha$;
д) $\sin\alpha + \cos\alpha$; е) $\cos\alpha - \sin\alpha$.

642. а) $\cos 40° + \cos 30° + \cos 20° + \cos 10°$;
б) $\sin 5° + \sin 10° + \sin 15° + \sin 20°$.

643. Вычислите:
а) $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$;
в) $\sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}$; г) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$.

Доказываем (644—645).

644. Докажите справедливость равенства:
а) $\sin 50° + \sin 10° - \cos 20° = 0$;
б) $\cos 48° + \sin 18° - \cos 12° = 0$.

645. Докажите справедливость равенства:
а) $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} = 0$; б) $\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} = 0$;
в) $\cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} = 0$; г) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{7\pi}{10} = 0$.

646. Вычислите:
а) $\cos 75° \cdot \cos 105°$; б) $\sin 75° \cdot \sin 15°$;
в) $\cos\frac{75°}{2} \cdot \cos\frac{15°}{2}$; г) $\sin 105° \cdot \cos 15°$.

647[1]. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

Доказываем (648—651).

648. Докажите справедливость равенства:
а) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$; б) $\cos 20° - \sin 50° = \sin 10°$;
в) $\sin 87° - \sin 93° - \sin 59° + \sin 61° = \sin 1°$.

649. Докажите, что для любого угла α справедливо неравенство $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$.

Докажите справедливость равенства **(650—651)**:

650. а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta} = \operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$; б) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

651. а) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

652. Представьте в виде произведения:

а) $1+2\sin\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2}+\sin\alpha\right) = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\alpha\right) = \ldots$;

б) $1-2\cos\alpha$; в) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

5. Формулы для двойных и половинных углов

Теорема 1

Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Это равенство называют **формулой синуса двойного угла.**

Теорему 1 можно сформулировать так: синус угла 2α равен удвоенному произведению синуса угла α и косинуса угла α.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

[1] В заданиях 647 и 650 угол α таков, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

Теорема 2

Для любого угла α справедливо равенство

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Это равенство называют **формулой косинуса двойного угла.**

Теорему 2 можно сформулировать так: косинус угла 2α равен квадрату косинуса угла α минус квадрат синуса угла α.

Доказательство. Используя формулу косинуса суммы двух углов, получим

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \\ = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Найдём $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

Теорема 3

Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой квадрата синуса половинного угла.**

Теорема 4

Для любого угла α справедливо равенство

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Это равенство называют **формулой квадрата косинуса половинного угла.**

Доказательство теорем 3 и 4. Используя формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

откуда и следуют формулы (1) и (2).

Пример 2. Найдём $\cos\frac{\pi}{8}$.

Применяя формулу квадрата косинуса половинного угла, имеем

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Так как $\cos\frac{\pi}{8}$ положителен, то

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Пример 3. Найдём $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ и угол α принадлежит интервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Так как угол α принадлежит указанному интервалу, то $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{7}{9}.$$

Применяя формулу квадрата синуса половинного угла, получаем

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{8}{9}.$$

Легко видеть, что угол $\frac{\alpha}{2}$ принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}$ положителен. Теперь находим, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

653. Запишите формулу:
а) синуса двойного угла; б) косинуса двойного угла.

654. Чему равен квадрат:
а) синуса половинного угла;
б) косинуса половинного угла?

655. Запишите следующие углы в виде 2α, где угол α равен:
а) $30°$; б) $90°$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) 4π; е) π; ж) $\frac{3\pi}{2}$.

656. Упростите выражение:
а) $2\sin 15° \cos 15°$; б) $4\sin 22°30' \cos 22°30'$;
в) $5\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\cos(-15°)\sin(-15°)$.

657. Вычислите $\sin 2\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Упростите выражение **(658—659)**:

658. а) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; б) $\sin^2 15° - \cos^2 15°$;
в) $\cos^2 20° - \sin^2 20°$; г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

659. а) $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\sin 50° \sin 40°$;
в) $\cos^2 15° - \cos^2 75°$; г) $(\sin 80° + \sin 10°)(\cos 80° - \cos 10°)$.

660. Выразите $\cos 2\alpha$ только через: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.

661. Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то что больше:
а) $\cos 2\alpha$ или $2\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha$?

662. Существуют ли углы α, для которых выполняется равенство $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$ $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$?

663. Вычислите: а) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$.

664[1]. Упростите выражение:
а) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$; б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$; в) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$;
г) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; д) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$; е) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

---

[1] Здесь и далее имеются в виду такие значения α, при которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

665. а) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \cos 2\alpha)$; г) $(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; е) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha$.

Доказываем. Докажите справедливость равенства **(666—667):**

666. а) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha = \sin 2\alpha$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; г) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

667. а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

668. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{5}$.

669. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}39^\circ + \operatorname{tg}6^\circ}{1 - \operatorname{tg}39^\circ\operatorname{tg}6^\circ}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}72^\circ - \operatorname{tg}12^\circ}{1 + \operatorname{tg}72^\circ\operatorname{tg}12^\circ}$;

в) $\operatorname{tg}75^\circ$; г) $\operatorname{tg}15^\circ$; д) $\operatorname{tg}105^\circ$.

670. При каких значениях α верно равенство:

а) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$; б) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$?

671. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

672. Запишите следующие углы в виде $\dfrac{\alpha}{2}$, где угол α равен: 30°; 180°; π; 2π.

673. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:

а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; б) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

в) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; г) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha$; е) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha$;

ж) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha$; з) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha$.

674. а) Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

б) Вычислите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

675. Упростите выражение:

а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$; б) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$;

в) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$; г) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$.

676. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} 135°$; б) $\operatorname{ctg} 120°$; в) $\operatorname{tg} 210°$; г) $\operatorname{ctg} 330°$;

д) $12\sin 120° \operatorname{tg} 300° \operatorname{ctg} 225°$;

е) $20\sin 330° \cos(-240°) \operatorname{tg} 120° - 2\cos 150° \operatorname{tg}(-135°)$;

ж) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$;

з) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 60° + \ldots + \operatorname{tg} 160° + \operatorname{tg} 180°$.

677. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\sin(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha) + \operatorname{tg}(180° - \alpha) - \operatorname{ctg}(270° + \alpha)$.

Доказываем. Докажите справедливость равенства **(678—679)**:

678. а) $\frac{\operatorname{tg}(90° + \alpha)\cos(270° + \alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180° - \alpha)\sin(270° + \alpha)} = -\sin\alpha$;

б) $$\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2(\alpha - 2\pi)} + \frac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = 1.$$

679. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

в) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 2\cos^2(\alpha - \beta)$;

г) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = 2\sin^2(\alpha - \beta)$;

д) $\cos^3\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha \cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$;

е) $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$;

ж) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha \cos 2\alpha$;

з) $1 + 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = 4\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

и) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

к) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

680. Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

681. Найдите:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$;

б) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$;

в) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

6. Произведение синусов и косинусов

Теорема

Для любых углов α и β справедливы равенства

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)); \tag{1}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)); \tag{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)). \tag{3}$$

Доказательство. Выпишем известные формулы синусов и косинусов суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha; \tag{4}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha; \tag{5}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{6}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

Сложив почленно равенства (4) и (5), получим

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (1).

Сложив почленно равенства (6) и (7), получим

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (2).

Вычтем почленно из равенства (7) равенство (6), получим

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (3).

Формулы (1), (2), (3) используют для преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Вычислим без таблиц и калькулятора

$$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}.$$

Применив формулу (2), получим

$$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Докажем справедливость равенства

$$\sin 2\alpha\sin\alpha+\sin 6\alpha\sin 3\alpha=\sin 5\alpha\sin 4\alpha. \qquad (8)$$

Применив формулу (3), получим

$$\sin 2\alpha\sin\alpha+\sin 6\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+$$

$$+\frac{1}{2}(\cos 3\alpha-\cos 9\alpha)=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 9\alpha).$$

Преобразуем по формуле (3) правую часть равенства (8):

$$\sin 5\alpha\sin 4\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 9\alpha).$$

Так как правая и левая части доказываемого равенства (8) равны одному и тому же выражению, то равенство (8) доказано.

682. Преобразуйте в сумму или разность:
а) $\cos 3\alpha\cos\alpha$; б) $\sin 5\alpha\sin 3\alpha$; в) $\sin 4\alpha\cos 2\alpha$;
г) $\cos\alpha\cos 2\alpha$; д) $\sin 2\alpha\sin 3\alpha$; е) $\sin\alpha\cos 4\alpha$.

683. **Доказываем.** Докажите, что:

а) $\sin\frac{9\pi}{28}\cos\frac{5\pi}{28}-\sin\frac{6\pi}{35}\cos\frac{\pi}{35}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}-\cos\frac{5\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

684. Вычислите:

а) $\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$; б) $\cos\frac{13\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}$; в) $\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$;

г) $\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}-\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}$;

д) $\cos\frac{11\pi}{56}\cos\frac{3\pi}{56}-\sin\frac{11\pi}{42}\sin\frac{17\pi}{42}$.

7. Исторические сведения

Понятия синуса, косинуса и тангенса угла возникли в геометрии и астрономии. Ими оперировали ещё древние математики, рассматривая отношение отрезков в треугольниках и окружностях. Древнегреческий учёный Клавдий Птолемей, живший во II в., составил подробную, весьма точную таблицу синусов углов, в течение многих веков служившую средством для решения треугольников.

В XI—XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Индийские учёные вводили понятие линии синусов для угла α — это хорда единичной окружности, соответствующая центральному углу 2α. Её длина равна $2\sin\alpha$. Линия синусов у них называлась «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». В Индии были составлены таблицы значений синусов для всех углов от $0°$ до $90°$ через каждые $3°45'$. Они были точнее таблиц Птолемея. Об их высокой точности говорит тот факт, что для синуса и косинуса $3°45'$ были вычислены значения $\frac{100}{1529}$ и $\frac{466}{467}$, отличающиеся от истинных менее чем на 0,00000001.

Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому учёному Насиру ад-Дину Мухаммаду ат-Туси (1201—1274). Однако и в его трудах ещё не была введена необходимая символика, и поэтому развитие тригонометрии происходило очень медленно. В XV в. немецкий учёный И. Мюллер (1436—1476), известный в науке под именем Региомонтан, издал труд «Пять книг о треугольниках всех видов», сыгравший важную роль в развитии тригонометрии.

В XV—XVII вв. в Европе было составлено и издано несколько тригонометрических таблиц. Над их составлением работали Н. Коперник (1473—1543), И. Кеплер (1571—1630), Ф. Виет (1540—1603) и др. В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. при участии Л. Ф. Магницкого.

Н. Коперник

Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера. Он, в частности, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул. Впервые в его трудах встречаются записи $\sin x$, $\cos x$ и др. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие её в строгой научной последовательности.

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ, СТАТИСТИКИ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Материал этой главы выносится на итоговый контроль в небольшом объёме, но знание правил приближённых вычислений, способов представления данных и их числовых характеристик, комбинаторных правил и формул для вычисления вероятностей не только готовит вас к экзаменационным испытаниям. Эти правила широко применимы на практике и помогают ориентироваться в окружающем нас и растущем информационном потоке.

§ 11. Приближения чисел

Теория приближённых вычислений занимается изучением того, насколько близки к истинным рассматриваемые приближения чисел.

11.1. Абсолютная погрешность приближения

Мы уже знаем, что если число $\overline{a}$ (a с чертой) мало отличается от числа a, то говорят, что a **приближённо равно** $\overline{a}$, и пишут:

$$a \approx \overline{a}.$$

Говорят ещё, что $\overline{a}$ есть **приближение числа** a. Напомним, что знак $\approx$ — это знак приближённого равенства.

Величину $|a - \overline{a}|$ называют **абсолютной погрешностью приближённого равенства** $a \approx \overline{a}$ **или приближения числа** a **при помощи числа** $\overline{a}$.

Другими словами, абсолютной погрешностью приближения числа a при помощи числа $\overline{a}$ называют абсолютную величину разности этих чисел.

Всякое число h, большее абсолютной погрешности приближения или равное ей:

$$h \geqslant |a - \overline{a}|,$$

называют **оценкой погрешности приближения** или, коротко, **погрешностью приближения** ($a \approx \overline{a}$).

Очевидно, абсолютная погрешность приближения есть наименьшая (самая малая) погрешность приближения.

Ясно, что если число h — погрешность приближения, то любое большее его число h_1 ($h_1 \geqslant h$) также есть погрешность приближения.

Абсолютную погрешность приближения важно знать. Однако на практике она далеко не всегда может быть известна. Поэтому обычно находят лишь погрешность приближения. При этом стараются, чтобы погрешность была записана в достаточно простой форме и чтобы она не была очень завышена.

Если число a удовлетворяет неравенствам

$$a_1 \leqslant a \leqslant a_2,$$

где a_1 и a_2 — приближение числа a ($a_1 \approx a$, $a_2 \approx a$), то говорят, что a_1 есть приближение с недостатком (снизу), а a_2 есть приближение с избытком (сверху) числа a с точностью до $a_2 - a_1$.

Пример 1. Имеет место приближённое равенство

$$17{,}32 \approx 17$$

с точностью до 1, потому что

$$|17{,}32 - 17| = 0{,}32 < 1.$$

В данном случае абсолютная погрешность равна 0,32, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 1.

Например, если расстояние между двумя автобусными остановками 17,32 км, то во многих случаях мы сказали бы, что оно равно 17 км и нас бы поняли в том смысле, что 17 км есть приближённое значение расстояния между остановками с точностью до 1 км.

Пример 2. Имеет место приближённое равенство

$$879 \approx 900$$

с точностью до 50, потому что

$$|900 - 879| = 21 < 50.$$

В данном случае абсолютная погрешность приближения равна 21, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 50. Например, при оплате железнодорожного проезда большие расстояния выражаются с точностью до 50 км.

Пример 3. При измерении температуры больного обнаружили, что уровень ртутного столба термометра находится между 38,3° и 38,4°. Пусть T — истинная температура больного. Тогда говорят, что T приближённо равна $38{,}3°$ с точностью до $0{,}1°$ с недостатком или T приближённо равна $38{,}4°$ с точностью до $0{,}1°$ с избытком, и пишут:

$$T \approx 38{,}3°, \quad T \approx 38{,}4°. \qquad (1)$$

Точное значение T нам неизвестно, абсолютная погрешность указанных приближений тоже неизвестна. Однако мы знаем, что $38{,}3° < T < 38{,}4°$. Отсюда следует, что

$$|T - 38{,}3°| < 0{,}1°,$$
$$|T - 38{,}4°| < 0{,}1°.$$

Поэтому приближения (1) имеют место с точностью до $0{,}1°$.

Пример 4. Для числа

$$a = -13{,}23089107$$

имеют место неравенства

$$-13{,}231 < a < -13{,}230,$$

показывающие, что

$$a \approx -13{,}231 \text{ и } a \approx -13{,}230$$

с точностью до $0{,}001$ соответственно с недостатком и избытком.

Числа можно приближать с округлением. Напомним процесс округления на примерах.

Пример 5. Приблизим число a с точностью до второго знака после запятой с округлением и укажем погрешность приближения, если: а) $a = 3{,}5629$; б) $a = 3{,}56812$; в) $a = 3{,}565$.

а) В силу неравенств

$$3{,}56 < 3{,}5629 < 3{,}57$$

в качестве приближения числа $a = 3{,}5629$ с точностью до $0{,}01$ можно взять как $3{,}56$, так и $3{,}57$. Но если мы возьмём среди них ближайшее к a число, то получим приближение с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$. Так как у числа a третья цифра после запятой есть 2 и $2 < 5$, то ближайшее к a число есть $3{,}56$, оно и есть приближение с округлением.

б) Справедливы неравенства

$$3{,}56 < 3{,}56812 < 3{,}57.$$

При этом разность $3{,}57 - 3{,}56 = 0{,}01$. Но число $a = 3{,}56812$ имеет третью цифру после запятой 8, бóльшую 5 ($8 > 5$). Следовательно, a ближе к числу $3{,}57$, чем к числу $3{,}56$. Выбирая в качестве приближения число $3{,}57$, получаем погрешность приближения, меньшую чем $0{,}005$. Число $3{,}57$ есть приближение с округлением.

в) Верны неравенства

$$3{,}56 < 3{,}565 < 3{,}57.$$

Третья цифра после запятой у числа $a = 3{,}565$ есть 5, т. е. a находится посредине между числами 3,56 и 3,57. Принято брать в качестве приближения с округлением большее из них: 3,57.

Ответ: 1) $3{,}5629 \approx 3{,}56$; 2) $3{,}56812 \approx 3{,}57$; 3) $3{,}565 \approx 3{,}57$. Погрешность в трёх случаях не превышает $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.

685. а) Что такое приближённое равенство?
б) Что такое погрешность и абсолютная погрешность приближения?
в) Каков знак приближённого равенства?
г) Что называют приближением с недостатком (снизу)?
д) Что называют приближением с избытком (сверху)?

686. С какой точностью приближает число a_1 (a_2) число a, если $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$?

687. Как найти приближение числа с точностью до второго знака после запятой с округлением? Какова погрешность этого приближения?

688. а) Как читают выражение $a \approx a_1$?
б) Можно ли считать равенство $3 = 3$ приближённым равенством?

689. Какие из чисел можно считать точными, а какие — приближёнными значениями величин:
а) 7439 м — высота пика Победы;
б) 16 см — ширина тетради;
в) 100 копеек есть один рубль;
г) 12° — температура воздуха?

690. Укажите абсолютную погрешность приближения для следующего приближённого равенства:
а) $2{,}7 \approx 3$; б) $5{,}789 \approx 5{,}79$; в) $0{,}83 \approx 0{,}8$; г) $32 \approx 30$.

691. Для приближённого значения числа $\frac{3}{7}$ укажите абсолютную погрешность приближения:
а) 0,4; б) 0,5; в) 0,42; г) 0,43.

692. а) С какой точностью можно измерять длины с помощью обыкновенной линейки?
б) С какой точностью показывают время электронные наручные часы?

693. а) Можно ли считать приближение числа a с точностью до 0,01 приближением числа a с точностью до 0,1?
б) Можно ли приближение числа a с точностью до 0,01 считать приближением числа a с точностью до 0,001?

694. Укажите на координатной оси все приближения числа 2,185 с точностью до:
а) 1; б) 0,1; в) 0,01.

695. Какое приближение числа $\pi \approx 3{,}1415$ лучше: 3,14 или 3,15?

696. Найдите приближения чисел 1372,05; 0,000137208; –1,3027; –17,002 с округлением с точностью:
а) до одной цифры после запятой;
б) до двух цифр после запятой;
в) до трёх цифр после запятой.
Укажите абсолютную погрешность приближения.

11.2. Относительная погрешность приближения

Относительной погрешностью приближённого равенства

$$a \approx \overline{a}$$

называют отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине числа a, т. е.

$$\frac{|a - \overline{a}|}{|a|}.$$

Например, если

$$a = 17{,}83,\ \overline{a} = 18,$$

то получим приближённое равенство

$$17{,}83 \approx 18$$

с абсолютной погрешностью

$$|a - \overline{a}| = 0{,}17$$

и относительной погрешностью

$$\frac{|a - \overline{a}|}{|a|} = \frac{0{,}17}{17{,}83} < \frac{0{,}17}{17} = 0{,}01,$$

которая, как мы видим, оценивается сверху числом 0,01.

Если некоторое число превышает данное, то говорят, что оно оценивает данное число сверху или является оценкой сверху данного числа.

Если бы кто-нибудь измерил длину детали, имеющей истинную длину 10 см, и при этом допустил абсолютную погрешность, равную 1 см, то мы бы сказали, что это измерение плохое — приближение грубое. Между тем если при измерении длины комнаты, истинная длина которой 5 м, допустить ту же абсолютную погрешность 1 см, то мы бы сказали, что это измерение неплохое. Точность приближения, как правило, характеризуется не абсолютной погрешностью, а относительной. В примере с измерением детали относительная погрешность равна $\frac{1}{10}$, а в примере с комнатой относительная погрешность равна $\frac{1}{500}$. Чем меньше относительная погрешность приближения, тем более точным считается приближение.

В жизни нам часто приходится упрощать положительные числа, заменяя в целом числе некоторые его последние цифры нулями или заменяя нулями в десятичной дроби все цифры после запятой, начиная с некоторой. Если известно, что в городе 253 624 жителя, то обычно достаточно сказать, что в городе 253 000 или даже 250 000 жителей.

Мы упростим десятичную дробь 0,037123, если заменим в ней последние три цифры нулями, получим дробь 0,037.

При этом число 253 000 является приближением числа 253 624 с точностью до третьей значащей цифры с недостатком; число 0,037 — приближением числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры с недостатком.

В том случае, когда желают получить более точное приближение числа, прибегают к округлению. Так, 254 000 есть приближение числа 253 624 с точностью до третьей значащей цифры с округлением. Число 0,037 есть приближение числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры с округлением.

Возникает вопрос об оценке относительной погрешности при подобных упрощениях, которые можно рассматривать как приближённые равенства.

Оценим относительную погрешность приближённых равенств

$$253\,624 \approx 253\,000, \qquad (1)$$
$$0{,}037123 \approx 0{,}037. \qquad (2)$$

При оценке относительных погрешностей удобно записывать числа в стандартном виде. Запишем все числа в приближённых равенствах (1) и (2) в стандартном виде:

$$2{,}53624 \cdot 10^5 \approx 2{,}53 \cdot 10^5, \quad 3{,}7123 \cdot 10^{-2} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Здесь число $2{,}53 \cdot 10^5$ есть приближение числа $2{,}53624 \cdot 10^5$ с точностью до третьей значащей цифры с недостатком, а число $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ есть приближение числа $3{,}7123 \cdot 10^{-2}$ с точностью до второй значащей цифры с недостатком.

Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|2{,}53624 - 2{,}53| \leqslant 0{,}01,$$
$$|3{,}7123 - 3{,}7| \leqslant 0{,}1.$$

Теперь оценим относительную погрешность приближённых равенств (1) и (2):

$$\frac{|253\,624 - 253\,000|}{253\,624} = \frac{|2{,}53624 - 2{,}53| \cdot 10^5}{2{,}53624 \cdot 10^5} \leqslant \frac{0{,}01}{2{,}53624} \leqslant 0{,}01,$$
$$\frac{|0{,}037123 - 0{,}037|}{0{,}037123} = \frac{|3{,}7123 - 3{,}7| \cdot 10^{-2}}{3{,}7123 \cdot 10^{-2}} \leqslant \frac{0{,}1}{3{,}7123} \leqslant 0{,}1.$$

Эти примеры подтверждают справедливость следующего правила:

> **Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры с недостатком, то относительная погрешность этого приближения не превышает $10^{-(k-1)}$.**

Теперь оценим относительную погрешность приближённых равенств

$$253\,624 \approx 254\,000, \qquad (3)$$
$$0{,}037123 \approx 0{,}037. \qquad (4)$$

В правых частях приближённых равенств (3) и (4) записаны приближения чисел, стоящих в их левых частях, с округлением. Запишем все числа в равенствах (3) и (4) в стандартном виде:

$$2{,}53624 \cdot 10^5 \approx 2{,}54 \cdot 10^5,$$
$$3{,}7123 \cdot 10^{-2} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

В этих приближённых равенствах число $2{,}54 \cdot 10^5$ есть приближение числа $2{,}53624 \cdot 10^5$ с точностью до третьей значащей цифры с округлением, а число $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ есть приближение числа $3{,}7123 \cdot 10^{-2}$ с точностью до второй значащей цифры с округлением.

Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|2{,}53624 - 2{,}54| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}01,$$
$$|3{,}7123 - 3{,}7| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Оценим относительную погрешность приближённых равенств (3) и (4):

$$\frac{|253\,624 - 254\,000|}{253\,624} = \frac{|2{,}53624 - 2{,}54| \cdot 10^5}{2{,}53624 \cdot 10^5} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}01}{2{,}53624} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}01,$$

$$\frac{|0{,}037123 - 0{,}037|}{0{,}037123} = \frac{|3{,}7123 - 3{,}7| \cdot 10^{-2}}{3{,}7123 \cdot 10^{-2}} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1}{3{,}7123} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Эти примеры подтверждают справедливость следующего правила:

> **Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры с округлением, то относительная погрешность этого приближения не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}$.**

Отметим, что число 0,037 является приближением числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры как с недостатком, так и с округлением.

Пример 1. Приближение

$$0{,}012316 \approx 0{,}01231 \tag{5}$$

произведено с точностью до четвёртой значащей цифры с недостатком (без округления), его относительная погрешность оценивается так:

$$\frac{|1{,}2316 - 1{,}231| \cdot 10^{-2}}{1{,}2316 \cdot 10^{-2}} = \frac{0{,}0006}{1{,}2316} < 10^{-3}.$$

Относительная погрешность приближённого равенства (5) не превышает $10^{-(k-1)}$, где $k = 4$ — номер значащей цифры, с точностью до которой произведено приближение.

Если же в равенстве (5) взять приближение с округлением

$$0{,}012316 \approx 0{,}01232,$$

то его относительная погрешность оценивается так:

$$\frac{|1{,}2316 - 1{,}232| \cdot 10^{-2}}{1{,}2316 \cdot 10^{-2}} < \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}}{1{,}2316} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Пример 2. Оценим относительную погрешность приближения:
а) $32\,481 \approx 32\,400$; б) $32\,481 \approx 32\,500$;
в) $0{,}011756 \approx 0{,}01175$; г) $0{,}011756 \approx 0{,}01176$;
д) $9431 \approx 9400$.

Относительная погрешность приближённого равенства не превышает: а) 10^{-2}; б) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$; в) 10^{-3}; г) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$; д) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$.

Приближение в случаях «а» и «б» произведено с точностью до третьей значащей цифры, в случае «а» — с недостатком, в случае «б» — с округлением; в случаях «в» и «г» — с точностью до четвёртой значащей цифры, в случае «в» — с недостатком, в случае «г» — с округлением; в случае «д» — с точностью до второй значащей цифры с округлением.

697. а) Что называют относительной погрешностью приближения? б) Сформулируйте правило оценки относительной погрешности при упрощении записи числа.

698. Определите абсолютную и относительную погрешности приближения:
а) $127 \approx 130$; б) $17 \approx 20$; в) $1{,}2 \approx 1$;
г) $0{,}12 \approx 0{,}1$; д) $0{,}185 \approx 0{,}19$; е) $1{,}00384 \approx 1{,}004$.

699. Округлите число до одной цифры после запятой и определите абсолютную и относительную погрешности приближения:
а) $0{,}48$; б) $1{,}324$; в) $17{,}55$;
г) $-0{,}51$; д) $-1{,}287$; е) $-173{,}6051$.

700. Оцените относительную погрешность приближённого равенства:
а) $23\,392 \approx 23\,000$; б) $25{,}136 \approx 25$;
в) $0{,}324 \approx 0{,}3$; г) $0{,}000578 \approx 0{,}0006$.

701. Округлите следующие числа, заменяя последние две цифры нулями: а) $71\,523$; б) $0{,}568$; в) $0{,}00328$.
Оцените относительную погрешность полученных приближений.

702. Округлите число до единиц и определите относительную погрешность приближения: а) $17{,}89$; б) $0{,}568$; в) $0{,}98347$.

703. Округлите числа:
$a = 23\,807\,113$, $b = 10{,}006348$, $c = 0{,}00238072113$,
заменяя цифры, начиная с некоторого разряда, нулями так, чтобы полученные числа приближали a, b, c с относительной погрешностью, меньшей чем: а) $0{,}001$; б) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}001$.

11.3*. Приближения суммы и разности

Пусть даны числа a и b и пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — их приближения. Будем считать, что сумма $\overline{a} + \overline{b}$ и разность $\overline{a} - \overline{b}$ соответственно приближают сумму $a + b$ и разность $a - b$, т. е. будем рассматривать приближения

$$a + b \approx \overline{a} + \overline{b}, \quad a - b \approx \overline{a} - \overline{b}.$$

Теорема

Абсолютная погрешность приближения суммы или разности двух чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Доказательство. Так как абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, то

$$|(a+b)-(\overline{a}+\overline{b})| = |(a-\overline{a})+(b-\overline{b})| \leqslant |a-\overline{a}|+|b-\overline{b}|.$$

В левой части этого неравенства стоит абсолютная погрешность суммы чисел a и b, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Аналогично

$$|(a-b)-(\overline{a}-\overline{b})| = |(a-\overline{a})-(b-\overline{b})| \leqslant |a-\overline{a}|+|b-\overline{b}|.$$

Теперь в левой части неравенства стоит абсолютная погрешность приближения разности чисел a и b, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел, что и доказывает теорему.

Пример 1. Приближённое равенство

$$3{,}47086 + (-2{,}3697) \approx 3{,}47 - 2{,}36 = 1{,}11$$

имеет место с точностью до

$$2 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}02,$$

потому что мы приближали слагаемые с недостатком, а приближённое равенство

$$3{,}47086 + (-2{,}3697) \approx 3{,}47 - 2{,}37 = 1{,}10$$

имеет место с точностью до

$$2 \cdot \frac{10^{-2}}{2} = 0{,}01,$$

потому что мы приближали слагаемые с округлением.

Пример 2. Приближённое равенство

$$-3{,}(01) + (-6{,}(724)) \approx -3{,}0101 + (-6{,}7247) = -9{,}7348$$

имеет место с точностью до

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}0001 = 0{,}0001,$$

потому что мы приближали слагаемые с округлением.

Теорема о погрешности приближения суммы двух слагаемых обобщается на любое конечное число слагаемых.

Теорема

Абсолютная погрешность приближения суммы конечного числа слагаемых не превышает суммы абсолютных погрешностей этих слагаемых.

Доказательство. Пусть имеются приближённые равенства

$$a \approx \overline{a},\ b \approx \overline{b},\ \dots,\ \omega \approx \overline{\omega},$$
$$a + b + \dots + \omega \approx \overline{a} + \overline{b} + \dots + \overline{\omega}.$$

Тогда

$$\left|(a + b + \dots + \omega) - (\overline{a} + \overline{b} + \dots + \overline{\omega})\right| =$$
$$= \left|(a - \overline{a}) + (b - \overline{b}) + \dots + (\omega - \overline{\omega})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|a - \overline{a}\right| + \left|b - \overline{b}\right| + \dots + \left|\omega - \overline{\omega}\right|.$$

В левой части этого неравенства записана абсолютная погрешность приближения суммы слагаемых a, b, ..., ω, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих слагаемых, что и доказывает теорему.

Пример 1. Даны приближения $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_{20}$ двадцати чисел a_1, a_2, ..., a_{20}. Первые десять из этих приближений: $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_{10}$ — даны с точностью до третьего знака после запятой с округлением. Последующие же десять приближений: $\overline{a}_{11}$, $\overline{a}_{12}$, ..., $\overline{a}_{20}$ — даны с точностью до второго знака после запятой тоже с округлением.

Найдём погрешность приближённого равенства

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} \approx \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \dots + \overline{a}_{20}. \qquad (1)$$

Для этого надо сложить погрешности приближённых равенств

$$a_1 \approx \overline{a}_1,\ \dots,\ a_{10} \approx \overline{a}_{10},\ a_{11} \approx \overline{a}_{11},\ \dots,\ a_{20} = \overline{a}_{20}.$$

Каждое из первых десяти приближений имеет погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2000}$, каждое из последних десяти приближений имеет погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$. Поэтому абсолютная погрешность приближённого равенства (1) не превышает числа

$$10 \cdot \frac{1}{2000} + 10 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{200} + \frac{1}{20} = \frac{11}{200}.$$

Пример 2. Дано 20 чисел (десятичных дробей):

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{20}.$$

Вычислим сумму этих чисел приближённо с точностью до 0,1.

Если числа задать с точностью до 10^{-k}, то сумма их будет отличаться от истинной суммы не более чем на величину $h = 20 \cdot 10^{-k}$.

При $k = 1$ получаем, что $h = 20 \cdot 10^{-1} = 2$.

При $k = 2$ получаем, что $h = 20 \cdot 10^{-2} = 0{,}2$.

При $k = 3$ получаем, что $h = 20 \cdot 10^{-3} = 0{,}02 < 0{,}1$.

Итак, заданные числа надо взять с тремя знаками после запятой.

Если их сложить, то полученная сумма будет приближённо равна истинной с точностью до 0,02, тем более с точностью до 0,1.

Однако если мы запишем приближения наших чисел с округлением с двумя знаками после запятой, то эти числа приближают соответствующие числа с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$. Тогда их сумма будет приближённо равна истинной с погрешностью, равной

$$20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}1.$$

Мы видим, что более экономно поставленную задачу можно решить, беря приближения чисел с двумя знаками после запятой, но с округлением.

704. а) Как оценивают абсолютную погрешность суммы, разности двух чисел?
б) Если приближённо вычисляют сумму или разность двух чисел с точностью до 10^{-3}, то как надо упростить эти числа?

705. Оцените точность приближённого равенства:
а) $123\ 784{,}5 + 3897 \approx 124\ 000 + 4000 = 128\ 000$;
б) $0{,}784 + 0{,}385 \approx 0{,}7 + 0{,}3 = 1{,}0$;
в) $2{,}583012 + 7{,}00284 \approx 2{,}583 + 7{,}002 = 9{,}585$;
г) $0{,}5872 + 0{,}3895 \approx 0{,}59 + 0{,}39 = 0{,}98$.

706. Найдите приближённо $a + b$ и $a - b$, приближая a и b до сотых с округлением. Определите точность приближения $a + b$ и $a - b$, если:
а) $a = 12{,}35817$, $b = 6{,}9879$;
б) $a = 7{,}1723$, $b = 0{,}8192$;
в) $a = 11{,}1429$, $b = 3{,}2872$;
г) $a = -3{,}12(27)$, $b = 1{,}22(891)$;
д) $a = 17{,}23(38)$, $b = -21{,}(136)$.

707. Найдите с точностью до 0,01 сумму и разность чисел:
а) $a = 3{,}1567$, $b = 2{,}0921$;
б) $a = 17{,}3281$, $b = -2{,}9856$;
в) $a = -7{,}0003$, $b = -2{,}9812$.

708. а) Как оценивают абсолютную погрешность приближения суммы нескольких слагаемых?
б) Если требуется найти приближённо сумму 20 дробей с точностью до 0,1, то как лучше их округлить?

709. У чисел 7,178219; 9,000017; 11,532478; 0,543712 оставьте три знака после запятой с округлением. Определите, с какой точностью сумма полученных таким округлением чисел приближает истинную сумму.

710. Какое округление чисел 0,378561; 2,235622; 3,789012; 4,251617 необходимо провести, чтобы их сумма была получена с точностью до 0,1? Выполните сложение данных чисел приближённо.

711. Пол комнаты состоит из 17 досок, ширина каждой из которых 35 см с точностью до 0,5 см. Какую возможную ошибку мы сделаем, если будем считать, что ширина комнаты (в направлении ширины досок) равна приближённо $35 \cdot 17$ см?

11.4*. Приближение произведения и частного

Рассмотрим приближённые равенства $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$.

Будем считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и что произведение $\overline{ab}$ приближает произведение ab:

$$ab \approx \overline{ab}. \qquad (1)$$

При оценке относительной погрешности произведения обычно пользуются следующим правилом:

Относительная погрешность приближения произведения чисел a и b не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел:

$$\left|\frac{ab - \overline{ab}}{ab}\right| \leqslant \left|\frac{a - \bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b - \bar{b}}{b}\right|. \qquad (2)$$

Замечание. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений тогда, когда относительные погрешности приближений чисел a и b настолько малы, что можно пренебречь их произведением сравнительно с самими погрешностями.

В самом деле, так как

$$ab - \overline{ab} = a(b - \bar{b}) + \bar{b}(a - \bar{a}) =$$
$$= a(b - \bar{b}) + b(a - \bar{a}) + (\bar{b} - b)(a - \bar{a}),$$

то абсолютная погрешность приближения (1) оценивается следующим образом:

$$|ab - \overline{ab}| \leqslant |b||a - \bar{a}| + |a||b - \bar{b}| + |b - \bar{b}||a - \bar{a}|, \qquad (3)$$

потому что абсолютная величина суммы не превышает сумму абсолютных величин и абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин.

Разделив неравенство (3) на произведение $|a||b|$, которое по предположению не равно нулю, получим

$$\left|\frac{ab - \overline{ab}}{ab}\right| \leqslant \left|\frac{a - \bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b - \bar{b}}{b}\right| + \left|\frac{a - \bar{a}}{a}\right| \cdot \left|\frac{b - \bar{b}}{b}\right|. \qquad (4)$$

Следовательно, относительная погрешность приближения произведения двух чисел a и b оценивается при помощи формулы (4).

Обычно приближения чисел выбирают так, что их относительные погрешности малы настолько, что их произведением можно пренебречь сравнительно с их суммой. Таким образом, в правой части неравенства (4) можно опустить третий член и мы получим неравенство (2).

Отметим, что при приближённом вычислении произведения чисел a и b относительные погрешности $\left|\frac{a-\overline{a}}{a}\right|$ и $\left|\frac{b-\overline{b}}{b}\right|$ надо стараться сделать равными.

Пример. Найдём приближённо произведение двух чисел

$$a = 3{,}7536 \text{ и } b = 12{,}289$$

с относительной погрешностью, меньшей чем 0,02.

Если приблизить числа a и b с относительными погрешностями, не большими 0,005, то относительная погрешность приближения произведения не будет превышать 0,01. Имеем

$$a = 3{,}7536 \approx 3{,}75$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005;

$$b = 1{,}2289 \cdot 10 \approx 12{,}3$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005;

$$ab \approx 3{,}75 \cdot 12{,}3 = 46{,}125$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01.$$

Округлим полученное число 46,125 с точностью до третьей значащей цифры: $46{,}125 \approx 46{,}1$ (с относительной погрешностью, не большей 0,005). Тогда

$$ab \approx 46{,}1 \tag{5}$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0{,}01 + 0{,}005 < 0{,}02,$$

и абсолютной погрешностью, не большей

$$0{,}02 \cdot |ab| < 0{,}02 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 1,$$

так как $|a| < 4$, $|b| < 12{,}5$.

Пусть даны приближения чисел a и b, отличных от нуля:

$$a \approx \overline{a},\ b \approx \overline{b},\ \overline{b} \neq 0.$$

Рассмотрим приближение частного этих чисел:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{\overline{a}}{\overline{b}}. \tag{6}$$

При оценке относительной погрешности приближения частного обычно пользуются следующим правилом:

> **Относительная погрешность приближения частного чисел a и b не превышает суммы относительных погрешностей приближений этих чисел:**
> $$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|. \qquad (7)$$

Замечание. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений тогда, когда число $\bar{b}$ близко к числу b и $|\bar{b}| \geqslant |b|$.

В самом деле, так как

$$\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{b\bar{b}} = \frac{a\bar{b}-ab+ab-b\bar{a}}{b\bar{b}} = \frac{a(\bar{b}-b)}{b\bar{b}} + \frac{a-\bar{a}}{\bar{b}},$$

то абсолютная погрешность приближения (6) оценивается следующим образом:

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right| \leqslant \left|\frac{a}{b\bar{b}}\right| |\bar{b}-b| + \frac{1}{|\bar{b}|}|a-\bar{a}|.$$

Разделив это неравенство на число $\left|\frac{a}{b}\right|$, по условию не равное нулю, получим

$$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left(\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|\right)\left|\frac{b}{\bar{b}}\right|. \qquad (8)$$

Итак, относительная погрешность приближения (6) оценивается при помощи формулы (8).

Из этой формулы мы теперь получим более простую формулу (7), если $\bar{b}$ возьмём настолько близким к b, чтобы можно было считать, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{b}{\bar{b}}\right| \leqslant 1.$$

Далее для оценки относительной погрешности мы будем пользоваться неравенством (7).

Отметим, что при приближённом вычислении частного чисел a и b надо стараться сделать равными относительные погрешности

$$\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| \text{ и } \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|.$$

Пример. Пусть $a = 12,345$, $b = 0,7876$. Вычислим приближённо частное $\frac{a}{b}$ с относительной погрешностью, не большей 0,02.

Так как $a = 1,2345 \cdot 10 \approx 1,23 \cdot 10$ с относительной погрешностью, не большей 0,005, и $b = 7,876 \cdot 10^{-1} \approx 7,88 \cdot 10^{-1}$ с относительной погрешностью, не большей 0,005, то

$$\frac{a}{b} \approx \frac{1,23 \cdot 10}{7,88 \cdot 10^{-1}} = 10^2 \cdot 0,15609... = 15,609... \qquad (9)$$

с относительной погрешностью, не большей $0,005 + 0,005 = 0,01$.

Округлив число в правой части равенства (9) с точностью до третьей значащей цифры, получим приближение

$$15,609 \approx 15,6$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005. Эту погрешность тоже придётся учесть. Окончательно получаем приближение

$$\frac{a}{b} \approx 15,6$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0,01 + 0,005 < 0,02,$$

и с абсолютной погрешностью, не большей

$$0,02 \cdot \left|\frac{a}{b}\right| < 0,02 \cdot \frac{14}{0,7} = 0,4,$$

так как $|a| < 14$, $|b| > 0,7$.

712. По какому правилу находят относительную погрешность приближения произведения чисел?

713. Вычислите приближённо с относительной погрешностью, меньшей 0,001, произведение двух чисел:
а) 0,12345678... и 2,(7); б) 0,000(7) и 16,723561;
в) 1,(3) и 0,0001436; г) π и 1567,23.

714. Вычислите приближённо с относительной погрешностью, меньшей $\frac{1}{500}$, произведение двух чисел:
а) 7,0(17) и 12,345678;
б) 0,013133133313... и 16,723561;
в) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.

715. По какому правилу находят относительную погрешность приближений частного чисел?

716. Вычислите приближённо с относительной погрешностью, меньшей 0,01, частное двух чисел:

а) 0,12345678... и 2,(17); б) 12,3(4) и 0,015639;
в) 123,567 и 0,13(7); г) 4,(567) и 31,5(32).

717. Вычислите приближённо с относительной погрешностью, меньшей $\frac{1}{500}$, частное двух чисел:

а) 7,9(17) и 1,234567...; б) 12,(45) и 0,012(4);
в) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.

11.5*. Приближённые вычисления и калькулятор

Практические вычисления, подобные рассмотренным выше, производят обычно на электронных калькуляторах. Как это делать, подробно рассказывается в инструкции, которая прилагается к каждому калькулятору. Поэтому мы остановимся только на некоторых вопросах, связанных с приближёнными вычислениями. Сами вычисления калькулятор производит моментально. Однако это не значит, что знания об абсолютных и относительных погрешностях не нужны тому, кто пользуется калькулятором. Они нужны, чтобы правильно поставить задачу и избежать излишне громоздких вычислений.

Кроме того, эти знания помогают правильно интерпретировать результаты, полученные с помощью калькулятора. Если на табло калькулятора, в который внесены приближённые значения чисел, получено число с несколькими знаками, то они не всегда верные. Надо разобраться в том, какие из них заведомо верные и какие следует отбросить. В этом помогут знания об абсолютных и относительных погрешностях.

Отметим, что калькуляторы обычно дают результаты без округления.

Будем далее говорить о калькуляторах, в которые вводится не более восьми цифр.

Например, числа 13,757689; 0,00035; 0,0000001; –2,000002 калькулятор принимает.

Такие числа можно на калькуляторе складывать, вычитать, умножать, делить. На табло калькулятора результат выдаётся в виде числа, записанного не более чем восемью цифрами.

Если точный результат выражается не более чем восемью цифрами, то он и выдаётся на табло. В этом случае результат получен точно.

Если же точный результат выражается более чем восемью цифрами и его абсолютная величина меньше 10^8, то на табло появляется приближённое значение результата, состоящее из первых его восьми цифр.

Если же абсолютная величина результата будет больше чем 10^8, то приходится уже поступать иначе, применяя запись чисел в стандартном виде.

Например, воспользовавшись калькулятором, получим

$$356 \times 781 = 278036, \tag{1}$$
$$23{,}1 \times 3{,}47 = 80{,}157, \tag{2}$$
$$35{,}272 \times 62{,}116 \approx 2190{,}9555, \tag{3}$$
$$0{,}00304 \times 85{,}123 \approx 0{,}2587739, \tag{4}$$
$$20{,}2 \times 187\ 235 \approx 3\ 782\ 147, \tag{5}$$
$$23 : 2{,}1 \approx 10{,}952380. \tag{6}$$

В этих равенствах каждое из данных чисел состоит не более чем из восьми цифр. Такие числа калькулятор принимает.

Равенства (1) и (2) точные, потому что произведение двух чисел, каждое из которых состоит из трёх цифр, само состоит не более чем из шести цифр. Такие числа калькулятор выдаёт точно.

Равенство (3) приближённое, верное с точностью до четвёртого знака после запятой. Калькулятор вычислил произведение точно и отбросил (без округления!) лишние (сверх восьми) цифры:

$$35{,}272 \times 62{,}116 = 2190{,}955552 \approx 2190{,}9555.$$

Таким образом, этот приближённый результат получен с точностью до $0{,}0001 = 10^{-4}$, т. е. с абсолютной погрешностью, меньшей чем 10^{-4}.

Аналогично калькулятор вычислит результаты в случаях (4), (5) и (6).

В приведённых примерах считалось, что в калькулятор вводились точные числа. Однако на практике часто приходится вводить в калькулятор результаты измерения некоторых величин, т. е. их приближения. В этом случае результаты вычислений могут получиться с бóльшими погрешностями, чем указывалось выше. Как обычно, мы будем считать, что результат измерения некоторой величины a (длины, площади, массы и т. д.) произведён с точностью до последнего знака числа, задающего эту величину.

Пример. Вычислим на калькуляторе произведение и частное чисел a и b, приближения которых 35,1 и 0,871, и упростим полученный результат с относительными погрешностями, не большими чем 0,021:

$$a \cdot b \approx 35{,}1 \cdot 0{,}871 = 30{,}5721 \approx 30{,}57,$$
$$a : b \approx 35{,}1 : 0{,}871 = 40{,}298507 \approx 40{,}30.$$

Пояснение. Имеем $a \approx 35{,}1$, $b \approx 0{,}871$ с относительными погрешностями, не большими 0,01. Далее, $ab \approx 30{,}5721$ с относительной погрешностью, не большей чем $0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02$, и $30{,}5721 \approx 30{,}57$ с относительной погрешностью, не большей чем 0,001. Окончательно $ab \approx 30{,}57$ с относительной погрешностью, не большей $0{,}02 + 0{,}001 = 0{,}021$.

При делении $a : b \approx 35{,}1 : 0{,}871$ имеем относительную погрешность, не большую чем 0,02.

Калькулятор выдал на табло число 40,298507 с относительной погрешностью, меньшей чем 0,02. Наконец, мы округлили число 40,298507 с относительной погрешностью, меньшей чем 10^{-3}.

В результате накопилась относительная погрешность, не большая чем $0{,}02 + 10^{-3} = 0{,}021$. Итак, если $a \approx 35{,}1$, $b \approx 0{,}871$, то $a : b \approx 40{,}30$ с относительной погрешностью, не большей 0,021.

§ 12. Описательная статистика

Описательная статистика занимается получением, систематизацией, обработкой и изучением тех или иных данных с использованием различных числовых характеристик.

12.1. Способы представления числовых данных

Одним из способов представления числовых данных является **таблица**.

Первая таблица, с которой сталкивается каждый учащийся (и его родители), — это табель успеваемости за четверть.

Пример 1. Рассмотрим табель успеваемости за I четверть ученика 9А класса *П. Иванова.*

Предмет	Отметка
Русский язык	3
Литература	4
История	3
Алгебра	5
Геометрия	4
Физика	5
Химия	4
...	

Изучая данные этой таблицы, можно заметить, что ученик П. Иванов более склонен к точным наукам, чем к гуманитарным. Такой вывод мы делаем на основе сравнения отметок по предметам

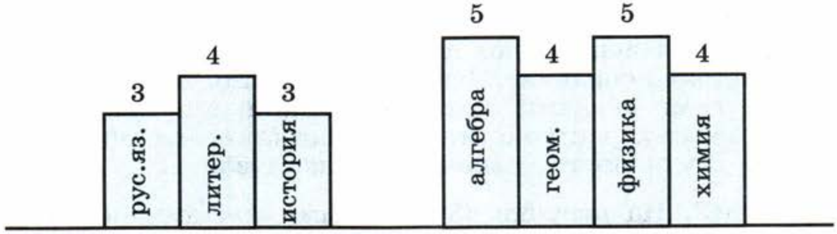


Рис. 81

естественно-научного цикла (алгебра, геометрия, физика и химия) и гуманитарного цикла (русский язык, литература, история).

Те же числовые данные можно представить в виде **столбчатой диаграммы** (рис. 81) и получить наглядное подтверждение сделанному выше выводу.

Для наглядного представления о соотношении частей, составляющих некоторую величину, часто используют **круговые диаграммы**. Круговая диаграмма строится путём разделения круга на секторы. Размер сектора определяется величиной угла, соответствующего доле данной величины среди всех рассматриваемых величин.

Пример 2. Доля продовольственных товаров в объёме розничного товарооборота России составила в 1992 г. 55%, а в 1997 г. — 49%, доля непродовольственных товаров составила 45% и 51% соответственно.

Построим круговые диаграммы, дающие представление о долях продовольственных и непродовольственных товаров в розничном товарообороте в каждом году. Изобразим два круга одинакового радиуса, определим величины центральных углов секторов. Так как 1% соответствует 3,6°, то для продовольственных товаров: $3{,}6° \cdot 55 = 198°$, $3{,}6° \cdot 49 = 176{,}4°$; для непродовольственных товаров: $3{,}6° \cdot 45 = 162°$; $3{,}6° \cdot 51 = 183{,}6°$. Разделим круги на соответствующие секторы, учитывая данные 1992 и 1997 гг. (рис. 82).

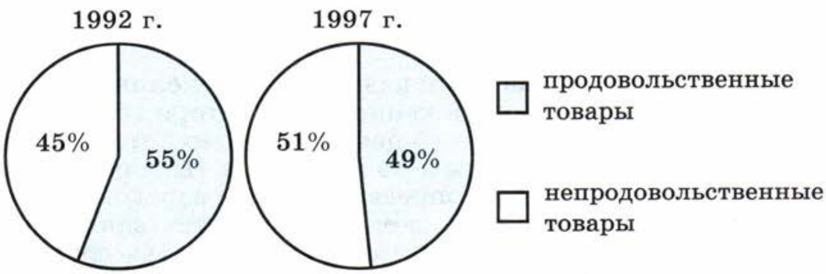


Рис. 82

Для изучения характера изменения величин и взаимосвязи различных величин используют **линейные диаграммы** (графики). Их строят в системе координат. Значения величины изображают точками или другими знаками, которые соединяют ломаными. На ось абсцисс наносят характеристики времени (дни, месяцы, кварталы, годы), а на ось ординат — значения показателя.

Пример 3. На рисунке 83 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

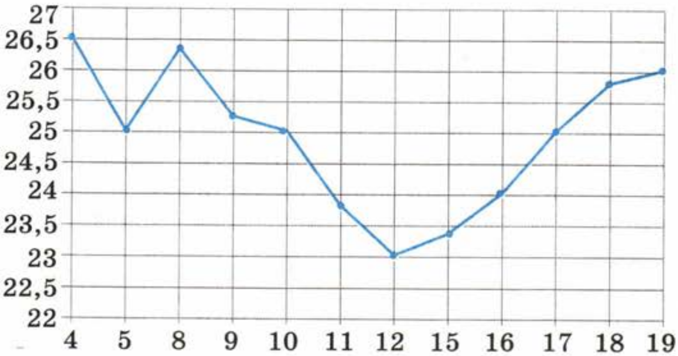


Рис. 83

Рассматривая рисунок 83, можно получить ответы на многие вопросы. Например, какова наименьшая цена нефти на момент закрытия торгов в указанный период? (Ответ: 23 доллара.) Какого числа уменьшение цены нефти по сравнению с предыдущим днём было наибольшим? (Ответ: 5 апреля.)

На одной линейной диаграмме можно построить несколько ломаных, которые позволят сравнить динамику различных показателей или одного и того же показателя в разных регионах, отраслях и др.

Пример 4. На рисунке 84 показано, какое количество автомобилей выпускали два завода в течение года. По горизонтали отложены месяцы, а по вертикали — общее количество автомобилей, выпущенное с начала года каждым из заводов, в тысячах штук.

По диаграмме нетрудно определить, что завод А до апреля выпускал меньше автомобилей, чем завод Б. Отставание составляло в январе, феврале и марте 100, 50 и 50 тыс. штук соответственно. Начиная с мая завод А выпускал автомобилей больше, чем завод Б.

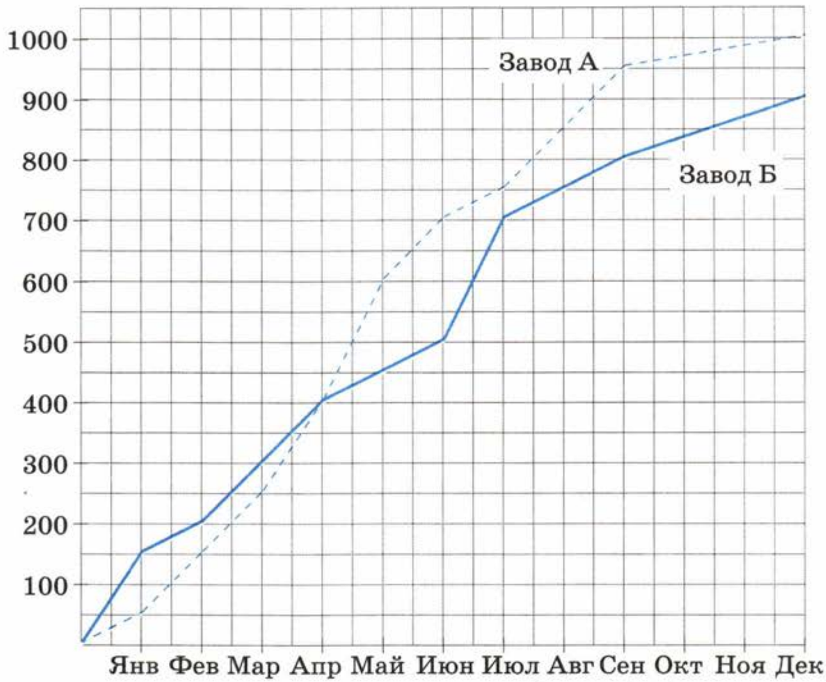


Рис. 84

Линейная диаграмма позволяет для каждого завода определить месяцы, в течение которых было произведено наибольшее количество автомобилей — 200 тыс. штук. Так, завод А произвёл столько автомобилей за май, а завод Б — за июль.

718. В таблице приведены результаты контрольной работы по математике одного класса.

Отметки	5	4	3	2
Число учащихся	4	12	12	2

Постройте по этим данным:
а) столбчатую диаграмму; б) круговую диаграмму.

719. В таблице приведены результаты сдачи экзамена по математике одного класса.

Отметки	5	4	3	2
Число учащихся	3	12	14	1

Постройте по этим данным:
а) столбчатую диаграмму; б) круговую диаграмму.

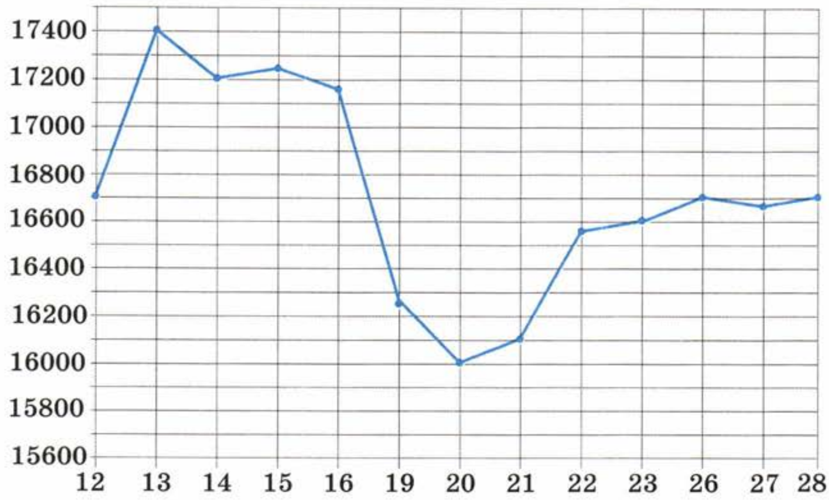


Рис. 85

720. На рисунке 85 жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку:

а) наименьшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период;

б) день, в который цена олова на момент закрытия торгов в указанный период была наибольшей;

в) день, в который цена олова на момент закрытия торгов снизилась по сравнению с предыдущим днём на наибольшую величину.

721. В таблице приведены данные о валовом сборе зерновых культур (млн ц) в двух областях Российской Федерации в 2006—2010 гг.

	2006	2007	2008	2009	2010
Новосибирская область	17,6	25,0	25,7	31,9	23,5
Омская область	28,9	30,8	22,9	40,0	22,3

Постройте по этим данным линейные диаграммы.

722. В таблице приведены данные о распределении населения (млн чел.) по возрастным группам городского и сельского населения России на 1 января 2007 г.

	Город	Село
Моложе трудоспособного возраста	15,6	7,2
Трудоспособный возраст	67,1	23,1
Старше трудоспособного возраста	21,1	8,2

Представьте эти данные тем способом, который вы считаете более наглядным.

723. **Ищем информацию.** Используя справочную литературу и Интернет, приведите примеры различных способов представления числовых данных.

724. В некотором царстве, в некотором государстве в ходе выборов в парламент по телевидению показали итоги голосования в одном из избирательных округов (рис. 86). Объясните, почему представленная информация о числе голосов избирателей, поданных за партии, не является достоверной.

Партии	Процент голосов избирателей
Партия радости	17,4%
Партия свободы	26.3%
Партия счастья	59,7%
Партия народа	21,8%

Рис. 86

12.2. Характеристики числовых данных

При обработке и анализе той или иной совокупности числовых данных используют различные их характеристики.

Пример 1. Отметки ученика по математике составляют ряд значений:

$$4,\ 4,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4.$$

Что можно сказать об этом наборе числовых данных?

Можно определить «средний» балл ученика. Для этого обычно используется **среднее арифметическое** данных чисел — частное их суммы и количества. Среднее арифметическое данного ряда значений равно $\dfrac{4+4+3+3+4+5+4}{7} \approx 3{,}86$, оно близко к отметке «4».

Это и не удивительно, так как отметка «4» в ряду данных значений встречается чаще. Такое значение называют модой. **Мода** — это такое значение в рассматриваемой совокупности, которое встречается чаще других. Это одна из характеристик данной совокупности чисел.

Слово «мода» имеет ещё один смысл — это непродолжительное господство определённого вкуса в какой-либо сфере жизни или культуры (в одежде, например, в выборе цвета автомобиля и т. п.).

Мода как средняя величина употребляется чаще для данных, имеющих нечисловую природу. Среди перечисленных цветов автомобилей — *белый*, *чёрный*, *синий металлик*, *белый*, *синий металлик*, *белый* — чаще встречается белый цвет, это и есть мода данного ряда. С помощью моды определяют наиболее популярные типы продукта, что учитывается при прогнозе продаж или планировании их производства.

Иногда в совокупности встречается более чем одна мода. Например, совокупность числовых данных

$$2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9,\ 10$$

имеет две моды — 6 и 9.

В этой совокупности числовых данных, выписанных в порядке неубывания, число 8 играет особую роль. Оно делит совокупность на две равные (по количеству элементов) части. Такое число в совокупности числовых данных называют **медианой**. Медиана делит неубывающую последовательность числовых данных на две равные части: сколько «нижних» единиц ряда данных будут иметь значения не больше, чем медиана, столько же «верхних» будут иметь значения не меньше, чем медиана.

Если совокупность содержит чётное число членов и средние её члены равны, то каждое из них является медианой. Например, в совокупности

$$2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 9,\ 10$$

медиана 6. Если совокупность содержит чётное число членов и средние её члены не равны, то медианой совокупности считают среднее арифметическое двух средних значений. Для совокупности

$$2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10$$

медианой считают число $\frac{6+8}{2} = 7$.

Для характеристики совокупности числовых данных используют ещё одну величину — **размах** — разность между наибольшим и наименьшим значениями результатов наблюдений. В совокупности

$$2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10$$

размах равен $10 - 2 = 8$.

Пример 2. Десять предпринимателей сделали вклады в благотворительный фонд (в условных единицах):

5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 20, 25, 1000.

Определим среднее арифметическое, моду, медиану и размах этой совокупности.

Среднее арифметическое этих чисел равно

$$\frac{5+5+5+10+10+10+10+20+25+1000}{10}=110,$$

мода 10, медиана 10, размах 995.

Заметим, что среднее арифметическое 110 в этом примере даёт неточное представление о «среднем» взносе каждого предпринимателя, медиана 10 показывает, что половина взносов не больше 10, а другая половина взносов не меньше 10. Размах 995 показывает разность между наибольшим и наименьшим взносами.

Характеристикой совокупности значений может служить и набор их отклонений от среднего арифметического этой совокупности. Выпишем набор отклонений в примере 2:

$$-105,\ -105,\ -105,\ -100,\ -100,\ -100,\ -100,\ -90,\ -85,\ +890.$$

Как видно, отклонения могут быть положительными и отрицательными, маленькими или большими (по абсолютной величине), сумма отклонений данной совокупности равна нулю. Этим свойством обладает сумма отклонений для любой совокупности, поэтому сумма отклонений не может быть характеристикой совокупности.

Обычно для совокупности вычисляют сумму квадратов отклонений, а так как совокупности могут иметь различное количество чисел, то вычисляют ещё среднее арифметическое квадратов отклонений. Эту величину называют **дисперсией** (от лат. *dispersio* — рассеяние). В математической статистике и теории вероятностей это наиболее употребительная мера отклонения от среднего.

Пример 3. В результате измерения (в градусах Цельсия) температуры воздуха в Москве в течение семи дней в июле получили совокупность значений: 15, 15, 18, 19, 19, 16, 17 (среднее значение $\frac{15+15+18+19+19+16+17}{7}=17$). В августе в течение пяти дней провели аналогичные измерения и получили новые значения: 19, 17, 15, 15, 14 (среднее значение $\frac{19+17+15+15+14}{5}=16$). Вычислим дисперсию для каждой совокупности.

Выпишем в виде таблицы числовые данные, отклонения и квадраты отклонений для каждой совокупности.

Таблица 1

Числовые данные	15	15	18	19	19	16	17
Отклонения от среднего	−2	−2	+1	+2	+2	−1	0
Квадраты отклонений	4	4	1	4	4	1	0

Таблица 2

Числовые данные	19	17	15	15	14
Отклонения от среднего	+3	+1	−1	−1	−2
Квадраты отклонений	9	1	1	1	4

Дисперсия первой совокупности равна

$$\frac{4+4+1+4+4+1+0}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7},$$

а дисперсия второй совокупности равна

$$\frac{9+1+1+1+4}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

Следовательно, дисперсия первой совокупности меньше, чем дисперсия второй. Это означает, что за выбранное время наблюдений температура отклонялась от среднего значения больше в августе, чем в июле.

725. За первый час были проданы мужские рубашки новой коллекции следующих цветов: розовый, белый, зелёный, зелёный, белый, голубой, голубой, белый, голубой, белый. Определите моду этой совокупности.

726. Определите среднее число очков, выпадающих на игральном кубике, на котором точками отмечены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какая из характеристик (среднее арифметическое, мода, медиана, размах) указывает на это число?

727. В двадцати классах средней школы учится 580 школьников. Выпишем их распределение по классам в неубывающем порядке:
23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 36.
Определите среднее арифметическое, моду, медиану и размах этой совокупности числовых данных.

728. В таблице отражена динамика курсов доллара и евро (десять значений, округлённых до десятых) в октябре 2009 г.

Доллар	30,1	29,8	29,8	29,6	29,6	29,6	29,5	29,5	29,3	29,3
Евро	44,0	44,0	43,8	43,8	43,6	43,5	43,6	43,9	43,8	43,7

Определите среднее арифметическое, моду, медиану и размах совокупности числовых данных: а) для доллара; б) для евро.

729. Два стрелка на тренировке показали результаты, представленные в таблице. Здесь для каждого стрелка выписано количество выбитых очков для каждого из 10 выстрелов.

Первый стрелок	7	8	7	9	10	7	8	9	10	10
Второй стрелок	7	6	8	9	9	8	9	9	8	7

Вычислите среднее значение и дисперсию для первого стрелка; для второго стрелка. Сделайте выводы из проведённого исследования.

730. Шериф полиции, только вступивший в должность, упомянул о резком росте преступности в округе при старом шерифе и для убедительности показал диаграмму числа преступлений за два года, предшествующие его назначению (рис. 87). Действительно ли преступность резко возросла?

Рис. 87

731. **Ищем информацию.** Используя данные из справочной литературы и Интернета, приведите примеры применения отклонений от среднего значения и дисперсии для характеристики совокупности данных.

732. **Доказываем.** Докажите свойства дисперсии:

а) если все числовые значения совокупности уменьшить (увеличить) на одну и ту же постоянную величину, то дисперсия от этого не изменится;

б) если все числовые значения совокупности уменьшить (увеличить) в k раз, то дисперсия уменьшится (увеличится) в k^2 раз.

§ 13. Комбинаторика

Комбинаторика занимается изучением задач выбора и расположения элементов некоторого (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами.

13.1. Задачи на перебор всех возможных вариантов

Рассмотрим задачи, в которых требуется осуществить перебор всех возможных вариантов или подсчитать их число.

Задача 1. Запишите все трёхзначные числа, в записи которых используются цифры 1, 2 и 3 без повторения.

Решение. Запишем в порядке возрастания все числа, удовлетворяющие условию задачи: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2 и 3?

Решение. В отличие от задачи 1, здесь можно повторять цифры. Чтобы ответить на вопрос задачи, можно выписать все числа без пропусков и повторений:

11	21	31
12	22	32
13	23	33

Но можно рассуждать и так. На первом месте может стоять одна из трёх цифр: 1, 2 или 3. В каждом из этих трёх случаев на второе место можно поставить одну из трёх цифр: 1, 2 или 3. Итого имеется $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел, записанных цифрами 1, 2 и 3.

Ответ: 9.

Убедимся тем же способом, что в задаче 1 можно составить только 6 чисел. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе место можно поставить только одну из двух оставшихся цифр, т. е. имеется $3 \cdot 2 = 6$ возможностей занять два первых места. В каждом из этих шести случаев третье место займёт оставшаяся третья цифра. Всего, таким образом, можно составить только 6 трёхзначных чисел.

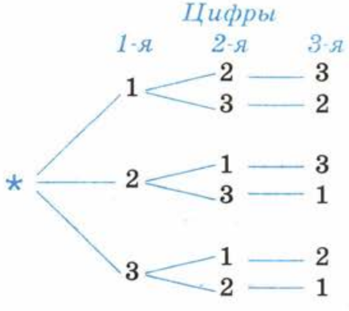


Рис. 88

Тот же результат можно получить, используя так называемое «дерево возможностей» или «дерево перебора». От его корня, отмеченного на рисунке 88 звёздочкой (*), проведём три отрезка, соответствующие трём возможностям поставить цифру на первое место, и поставим первую цифру 1, 2, 3. От каждой из этих цифр проведём по два отрезка, соответствующие двум возможностям поставить цифру на второе место, поставим вторую цифру. Наконец, от каждой из этих вторых цифр проведём по одному отрезку, соответствующему одной возможности поставить цифру на третье место, поставим третью цифру.

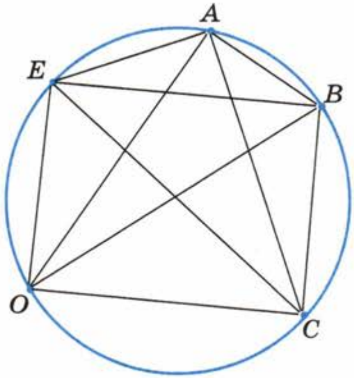


Рис. 89

Задача 3. На окружности отмечено 5 точек: A, B, C, O, E. Каждую точку соединили с каждой. Сколько отрезков получилось?

Решение. На рисунке 89 отрезки можно пересчитать — их 10. Но при большом числе точек такой пересчёт может привести к ошибке.

Решим задачу вторым способом. Из точки A проведено 4 отрезка: AB, AC, AO, AE; из точки B можно провести тоже 4 отрезка, но один из них (AB) уже учтён, значит, из точки B выходят 3 новых отрезка. Из точки C выходят 2 новых отрезка, из точки O — один. Из точки E выходят 4 отрезка, но все они уже учтены. Итого имеется $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ отрезков.

Решим задачу ещё одним способом. Из точки A выходят 4 отрезка: AB, AC, AO, AE. Из точки B выходят 4 отрезка: BA, BC, BO, BE. И т. д.

Из каждой из пяти точек выходят по четыре отрезка. Но чтобы получить ответ, надо произведение $4 \cdot 5$ разделить на 2, так как каждый из отрезков в этих перечислениях назван дважды. Итак, всего отрезков — 10.

Ответ: 10.

733. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры:
а) 5, 6, 7 без повторения; б) 5, 6, 7 с повторением;
в) 7, 8, 9 без повторения; г) 7, 8, 9 с повторением.

734. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1, 2:
а) без повторения; б) с повторением.

735. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 1, 2, 3:
а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

736. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 0, 2, 4, 6:
а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

737. Четыре друга купили 4 билета в кино. Сколькими различными способами они могут занять свои места в зрительном зале?

738. Сколько двузначных, трёхзначных, четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4:
а) без повторения; б) с повторением?

739. Бросили два игральных кубика. Сколькими различными способами могут выпасть очки на этих кубиках?

740. а) На окружности отметили 7 точек. Сколько получится отрезков, если соединить каждую точку с каждой?
б) Встретились 7 друзей, каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?

741. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

742. **Исследуем.** а) Встретились несколько друзей, каждый пожал руку каждому. Вова Веселов был так рад встрече, что пожал руку дважды некоторым из своих друзей, но не всем. Всего было 30 рукопожатий. Сколько друзей встретилось?
б) Встретились несколько друзей, каждый пожал руку каждому. Последним пришёл Петя Угрюмов, он пожал руку не всем своим друзьям. Всего было 30 рукопожатий. Сколько друзей встретилось?

13.2. Комбинаторные правила

Задачи, в которых надо найти число возможных вариантов для той или иной операции, того или иного события, называют **комбинаторными задачами.** Решению комбинаторных задач помогают комбинаторные правила.

> **Правило сложения.** Если имеется m способов выбрать элемент a и (независимо от них) n способов выбрать элемент b, то выбрать один элемент — или a, или b — можно $m + n$ способами.

Например, если в классе 12 мальчиков и 15 девочек, то выбрать одного человека — мальчика или девочку — можно $12 + 15 = 27$ способами.

Правило сложения можно обобщить для большего числа элементов.

> Если имеется m способов выбрать элемент a, n способов выбрать элемент b, ..., k способов выбрать элемент t, то выбрать один элемент — или a, или b, ..., или t — можно $m + n + \ldots + k$ способами.

Например, если на столе лежит 3 яблока, 4 апельсина и 6 мандаринов, то выбрать один плод можно $3 + 4 + 6 = 13$ способами.

Правило умножения. Если имеется m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Например, если в классе 12 мальчиков и 15 девочек, то выбрать одну пару — мальчика и девочку — можно $12 \cdot 15 = 180$ способами.

Правило умножения можно обобщить для большего числа элементов.

Если имеется m способов выбрать элемент a, n способов выбрать элемент b, ..., k способов выбрать элемент t, то набор $(a, b, ..., t)$ можно выбрать $m \cdot n \cdot ... \cdot t$ способами.

Например, если на столе лежит 3 яблока, 4 апельсина и 6 мандаринов, то яблоко, апельсин и мандарин можно выбрать $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ способами.

Комбинаторные правила позволяют находить решение задач, которые могут возникнуть на практике.

Задача 1. Из 25 учащихся класса нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор?

Решение. Старостой класса можно выбрать любого из 25 учащихся, а его заместителем — любого из 24 оставшихся учащихся. По правилу умножения имеется $25 \cdot 24 = 600$ способов выбрать старосту класса и его заместителя.

Задача 2. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C — три дороги, из города C в город D — две дороги. Туристы хотят проехать из города A в город D через города B и C. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Решение. Маршрут из A в B туристы могут выбрать двумя способами. В каждом случае они могут ехать из B в C тремя способами. Значит, имеется $2 \cdot 3 = 6$ способов проехать из A в C. Для каждого из этих шести способов имеется 2 способа проехать из C в D. Таким образом, всего существует $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ способов проехать из A в D.

Тот же результат получим по правилу умножения: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Задача 3. Сколько различных автомобильных номеров можно получить, используя три из 30 букв русского алфавита (без ь, ъ, ы) и четыре из десяти цифр (от 0 до 9), если цифры и буквы разрешается повторять и номер должен иметь вид, как на рисунке 90?

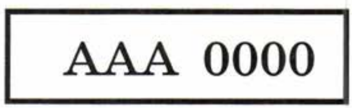


Рис. 90

Решение. Поставить на одно место любую из трёх букв можно тридцатью способами, а любую из четырёх цифр — десятью способами. Тогда по правилу умножения число всех номеров равно

$$30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \\ = 270\ 000\ 000.$$

743. На тарелке лежит 5 мандаринов и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать или мандарин, или апельсин?

744. На тарелке лежит 5 мандаринов и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один мандарин и один апельсин?

745. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор?

746. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор, если это должны быть:
а) два мальчика; б) две девочки;
в) мальчик-староста и девочка-заместитель;
г) девочка-староста и мальчик-заместитель;
д) мальчик и девочка (старостой может быть и мальчик, и девочка)?

747. Сколькими способами:
а) 3 человека могут разместиться на трёхместной скамейке;
б) 3 человека могут разместиться на четырёхместной скамейке;
в) 4 человека могут разместиться на четырёхместной скамейке?

748. Сколько различных автомобильных номеров можно получить, используя три из 30 букв русского алфавита (без ь, ъ, ы) и четыре из десяти цифр (от 0 до 9), если цифры и буквы повторять не разрешается и номер должен иметь вид, как на рисунке 90?

749. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Для генеральной уборки школы надо выбрать трёх мальчиков и четырёх девочек. Сколькими способами это можно сделать?

750. В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник, четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени и три третьих блюда: чай, кофе, компот. Сколько вариантов обеда предлагают в кафе?

751. Сколько решений в натуральных числах имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} a + b = 4, \\ c + d = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + b = 5, \\ c + d = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a + b = 4, \\ c + d = 6? \end{cases}$

13.3. Перестановки

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n $(n > 1)$ обозначают $n!$ (читают «эн факториал»):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Например,

$$2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \quad \ldots .$$

$1!$ считают равным 1: $1! = 1$.

Рассмотрим все способы записи в ряд двух букв a и b. Таких способов два:

$$ab, \; ba.$$

Три буквы a, b и c можно записать в ряд шестью способами:

$$abc, \; acb, \; bca, \; bac, \; cab, \; cba.$$

На первое место поставим букву a и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы b и c. Потом на первое место поставим букву b и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы a и c. Наконец, на первое место поставим букву c и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы a и b. Всего получилось

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \text{ способов.}$$

Перестановкой из n элементов называют какое-либо расположение этих элементов в определённом порядке. Количество перестановок из n элементов принято обозначать P_n (от франц. *permutation* — перестановка).

Справедлива формула

$$P_n = n!.$$

Для $n = 1$ формула верна по определению. Для $n = 2, 3$ она уже проверена нами. Чтобы проверить её для $n = 4$, рассуждаем так. Составим четыре ряда перестановок для цифр 1, 2, 3, 4. В первый ряд поставим все перестановки, начинающиеся с 1:

$$1234, \; 1243, \; 1324, \; 1342, \; 1423, \; 1432.$$

Таких перестановок $6 = 3!$, т. е. столько, сколько раз можно переставить три цифры 2, 3, 4, стоящие после цифры 1.

Но на первое место можно поставить любую из четырёх цифр, и в каждом таком случае получится 6 перестановок, т. е. всего перестановок

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!.$$

Доказать, что

$$P_n = n!$$

для любого натурального числа n можно с помощью метода математической индукции.

752. Что называют перестановкой из n элементов?

753. Что обозначает и как читается запись: а) $2!$; б) $3!$; в) $6!$; г) $n!$?

754. Выпишите все перестановки из цифр 1, 2, 3. Чему равно P_3?

755. Выпишите все возможные перестановки из четырёх букв и подсчитайте их количество (P_4).

756. Проказница-Мартышка, Осёл, Козёл да Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет. Выясните, сколькими способами они могут сесть со своими инструментами на четыре места.

757. Вычислите:
а) P_5; б) P_6; в) P_7.

758. Верно ли, что:
а) $P_5 = 5 \cdot P_4$; б) $P_6 = 6 \cdot P_5$;
в) $P_{100} = 100 \cdot P_{99}$; г) $P_n = n \cdot P_{n-1}$?

759. Вычислите:
а) $P_{10} : P_9$; б) $P_{50} : P_{49}$; в) $P_{20} : P_{18}$.

760. У кассира автобуса имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторения?

13.4. Размещения

Размещением из n элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ по два называют любую упорядоченную пару, составленную из данных n элементов. Количество размещений из n элементов по два обозначают через A_n^2 (по первой букве французского слова *arangement* — размещение).

Ниже выписаны все размещения из 3 элементов по 2:

$$\begin{array}{ll} x_1x_2, & x_1x_3, \\ x_2x_1, & x_2x_3, \\ x_3x_1, & x_3x_2. \end{array}$$

В первом ряду на первом месте стоит элемент x_1, к нему приписаны поочерёдно остальные два элемента. Получилось, что в первом ряду находятся все размещения, начинающиеся с x_1, — их два. Во втором и в третьем рядах находятся тоже по два размещения, начинающиеся с x_2 и с x_3. Таким образом, $A_3^2 = 3 \cdot 2$.

Размещения из n элементов по два можно расположить в n рядов. В каждом из них на первом месте стоит один из данных элементов x_i, к нему поочерёдно приписываются остальные $n - 1$ элементов. Этим рассуждением мы доказали формулу

$$A_n^2 = n(n-1). \tag{1}$$

Пример. Сколькими способами можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями?

Число способов, с помощью которых можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями, равно

$$A_7^2 = 7 \cdot (7-1) = 42.$$

Чтобы в этом убедиться, выпишем все возможные размещения в виде двузначных чисел, первая цифра которых показывает, какому другу достался первый билет, вторая показывает какому — второй:

$$\begin{array}{l} 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17, \\ 21,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 71,\ 72,\ 73,\ 74,\ 75,\ 76. \end{array}$$

В каждом из семи рядов по 6 размещений — всего $7 \cdot 6 = 42$ размещения, т. е. число способов распределения двух билетов в данной задаче равно 42.

Размещением из n элементов по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.

Количество размещений из n элементов по k обозначают через A_n^k. Например, A_n^3 находим следующим образом. Расположим размещения в n рядов. В i-м ряду поместим размещения, начинающиеся с элемента x_i. После элемента x_i поставим все возможные размещения из оставшихся $n-1$ элементов по 2, т. е. $(n-1)(n-2)$ различных размещений. Но всего строк n, поэтому

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Рассуждая подобным же образом, получим, что

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Можно доказать, что

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Заметим, что любое размещение из n элементов по n — это одна из перестановок из n элементов, поэтому

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

761. Выпишите все размещения из четырёх элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по два. Чему равно A_4^2?

762. Вычислите:

а) A_4^3; б) A_5^2; в) A_5^3;
г) A_7^4; д) A_7^5; е) A_8^6.

763. **Доказываем.** Докажите формулу: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

764. а) Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две разные путёвки?
б) Сколькими способами можно присудить трём лицам из шести три разные премии?

765. В турнире участвуют семь шахматистов. Сколькими способами могут распределиться между ними три первых места (каждое место должен занять один шахматист)?

766. У билетного кассира имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны разными цифрами?

767. У билетного кассира имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны без нулей?

768. У кассира автобуса имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Счастливым назовём билет, у которого сумма первых трёх цифр совпадает с суммой последних трёх цифр.
а) Сколько существует счастливых билетов, у которых сумма всех цифр равна 0; 2; 4; 6; 8?
б) Сколько всего счастливых билетов у кассира?

13.5. Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называют любую группу из k элементов, составленную из данных n элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают через C_n^k (по первой букве французского слова *combination* — сочетание).

Всякое размещение по k элементов можно рассматривать как сочетание. Разница заключается в том, что если в размещении переставить местами элементы, то получится другое размещение, а сочетание не зависит от порядка входящих в него элементов.

Вычисляя A_n^2, мы получаем пары, отличающиеся порядком элементов, например x_1x_2 и x_2x_1. Из двух элементов можно составить

$$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

пары, поэтому

$$A_n^2 = 2! \cdot C_n^2 = P_2 \cdot C_n^2,$$

следовательно,

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{P_2}.$$

Вычисляя A_n^k, мы получаем наборы из k элементов, отличающиеся порядком элементов. Из k элементов можно составить

$$P_k = k! = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

групп элементов, поэтому

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k \cdot C_n^k,$$

откуда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Следовательно,

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Эта формула доказана выше для $k > 1$, но она верна и для $k = 1$. Поэтому она справедлива для $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пример. Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, не важен, то число различных способов составить команду равно:

$$C_7^2 = \frac{A_7^2}{P_2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

769. Выпишите все сочетания из пяти элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два. Чему равно C_5^2?

770. Вычислите:
а) C_4^3; б) C_5^4; в) C_5^3; г) C_7^4; д) C_7^5; е) C_8^6.

Доказываем (771—772).

771. Докажите формулу: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

772. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Вычислите:
а) C_{10}^9; б) C_{10}^8; в) C_{12}^{10};
г) C_{12}^{11}; д) C_{200}^{199}; е) C_{1998}^{1997}.

773. а) Сколькими способами можно распределить две одинаковые путёвки между пятью лицами?
б) Сколькими способами можно присудить трём лицам из шести три одинаковые премии?

774. Из восьми фильмов жюри конкурса может отобрать трёх финалистов. Сколькими способами это можно сделать?

775. Из 27 учащихся класса нужно выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

§ 14. Введение в теорию вероятностей

Теория вероятностей занимается изучением числовых характеристик возможности осуществления какого-либо события при тех или иных условиях.

14.1. Случайные события

Далее будем рассматривать опыты (эксперименты, испытания), в результате проведения каждого из которых возможен только один из n ($n > 1$) заранее известных исходов, но также заранее неизвестно, какой именно исход осуществится в этом опыте. Такие опыты называют **случайными опытами**.

Будем также предполагать, что до проведения опыта нельзя отдать предпочтение тому или иному исходу и что каждый опыт можно многократно повторить в одних и тех же условиях. В таком случае будем говорить, что у данного опыта имеется n **равновозможных исходов**.

Приведём примеры случайных опытов, имеющих несколько равновозможных исходов.

Опыт 1. Подбрасывание монеты. Этот опыт может завершиться только одним из двух исходов: выпадением герба или выпадением решки, и эти два исхода равновозможные.

Опыт 2. Подбрасывание игрального кубика. Этот опыт может завершиться только одним из шести исходов: выпадением или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков, и эти шесть исходов равновозможные.

Опыт 3. Извлечение шара из урны, в которой находится три одинаковых шара, пронумерованные числами от 1 до 3. Этот опыт может завершиться только одним из трёх исходов: извлечён шар с номером k, где k или 1, или 2, или 3, и эти три исхода равновозможные.

Опыт 4. Извлечение из комплекта домино (28 костей) одной кости. Этот опыт может завершиться только одним из 28 исходов: извлечена данная кость, и эти 28 исходов равновозможные.

Опыт 5. Извлечение из колоды карт (36 карт) одной карты. Этот опыт может завершиться только одним из 36 исходов: извлечена данная карта, и эти 36 исходов равновозможные.

При изучении случайного опыта часто рассматриваются не только вопросы о том, какие исходы возможны и равновозможные ли они, но и другие вопросы. Например, при изучении опыта 2 можно рассмотреть вопрос: выпало ли чётное число очков? Если да, то говорят, что произошло событие, заключающееся в том, что выпало чётное число очков, или коротко: произошло событие A — «выпало чётное число очков». При изучении опыта 5 можно рассмотреть события:

B — «вынут туз»,
C — «вынута дама»,
D — «вынута карта пик» и т. п.

Далее каждый раз будем рассматривать только один случайный опыт, и лишь те события, которые могут произойти в результате этого опыта. Обычно в данном опыте про каждое событие нельзя утверждать, что оно обязательно произойдёт в этом опыте. Такие события называют **случайными событиями.** Далее будем рассматривать только случайные события. Приведём примеры случайных событий.

В опыте 2 может произойти случайное событие A — «выпало нечётное число очков» (или 1, или 3, или 5); или событие B — «выпало простое число очков» (или 2, или 3, или 5).

В опыте 4 может произойти случайное событие C — «извлечена кость с суммой очков 3». Ясно, что это событие произойдёт лишь в двух случаях: если будет извлечена или кость (0, 3), или кость (1, 2) (рис. 91).

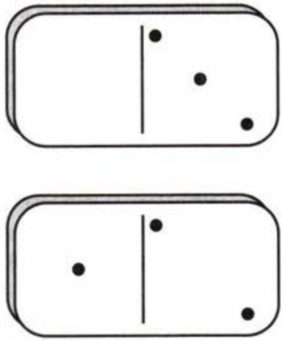


Рис. 91

В опыте 5 может произойти случайное событие D — «извлечён туз». Ясно, что это событие произойдёт, если будет извлечён туз любой масти из четырёх: или туз трефовый, или туз пиковый, или туз бубновый, или туз червовый.

В данном опыте каждый его исход является событием. Чтобы отличать исходы от других событий, будем называть их **элементарными событиями.**

Так, в опыте 2 событие «выпало 2 очка» элементарное, а события A и B неэлементарные; в опыте 4 событие C неэлементарное; в опыте 5 событие «извлечён туз трефовый» элементарное, а событие D неэлементарное.

Если событие A элементарное, то оно может произойти, если будет получен один из n исходов данного опыта, и этот исход называют **благоприятствующим** событию A. Говорят также, что этот исход благоприятствует событию A.

Например, в опыте 2 элементарному событию «выпало 6 очков» благоприятствует только один исход «выпало 6 очков».

В опыте 2 событие B может произойти, если произойдёт один из следующих исходов: выпадет или 2, или 3, или 5 очков. Эти три исхода называют **благоприятствующими** событию B. Говорят также, что каждый из этих исходов благоприятствует событию B.

Про те исходы, при которых происходит случайное событие A, говорят, что они **благоприятствуют** событию A.

Если событие не может произойти в данном опыте, то его называют **невозможным событием**. Например, в опыте 2 выпадение нуля очков есть невозможное событие. Если случайное событие — невозможное, то нет исходов данного опыта, при которых оно происходит. В таких случаях говорят, что невозможному событию благоприятствует 0 исходов.

Если событие обязательно произойдёт в данном опыте, то его называют **достоверным событием**. Например, в опыте 2 выпадение не более 6 очков является достоверным событием. Если случайное событие — достоверное, то оно происходит при любом из всех n исходов данного опыта, т. е. все n исходов благоприятствуют этому событию.

Таким образом, если в данном опыте возможно n исходов, то любое случайное событие в нём произойдёт, если ему благоприятствует k заранее определённых исходов, где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Все обсуждённые выше понятия можно интерпретировать на языке теории множеств.

Если рассмотреть множество Ω, состоящее только из всех n исходов данного опыта, то любое его подмножество можно считать событием в данном опыте. При этом подмножества, состоящие из одного элемента, есть элементарные события. Подмножество, совпадающее со всем множеством Ω, есть достоверное событие. Подмножество, являющееся пустым множеством, есть невозможное событие.

Заметим, что пустое множество является подмножеством любого множества, в том числе и множества Ω. Если множество Ω состоит из n элементов — всех исходов данного опыта, то можно доказать, что всего у этого множества 2^n подмножеств, включая пустое множество и само множество Ω.

При малых значениях n все эти подмножества, т. е. все события в данном опыте, можно перечислить.

В опыте 1 будет $2^2 = 4$ события:
1) выпадение и герба, и решки — невозможное событие;
2) выпадение герба — элементарное событие;
3) выпадение решки — элементарное событие;
4) выпадение или герба, или решки — достоверное событие.

В опыте 3 будет $2^3 = 8$ событий: извлечение шара:
1) с номером 0 — невозможное событие;
2) с номером 1 — элементарное событие;
3) с номером 2 — элементарное событие;
4) с номером 3 — элементарное событие;
5) с номером или 2, или 3 (т. е. без номера 1);
6) с номером или 1, или 3 (т. е. без номера 2);
7) с номером или 1, или 2 (т. е. без номера 3);
8) с номером или 1, или 2, или 3 — достоверное событие.

776. а) Какие опыты называют случайными опытами? Приведите пример.
б) В каком случае говорят, что у данного опыта имеется n равновозможных исходов? Приведите пример.
в) Какое событие называют невозможным событием? Приведите пример.
г) Какое событие называют достоверным событием? Приведите пример.
д) Вы выпускаете яблоко из рук. Каким событием — невозможным или достоверным — является событие: A — «яблоко упало вниз»; B — «яблоко упало вверх»?

777. В опыте бросают игральный кубик. Каким событием — достоверным или невозможным — является:
а) выпадение или чётного, или нечётного числа очков;
б) выпадение 7 очков?

778. В опыте бросают игральный кубик. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствует событию:
а) A — «выпало 3 очка»;
б) B — «выпало чётное число очков»;
в) C — «выпало нечётное число очков»;
г) D — «выпало или чётное, или нечётное число очков»?
Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C, D? Какие из событий A, B, C, D являются элементарными событиями?

779. В опыте бросают два игральных кубика. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствует событию:
а) A — «сумма очков равна 0»;
б) B — «сумма очков чётная»;
в) C — «сумма очков нечётная»;
г) D — «сумма очков равна 2»;
д) E — «сумма очков равна 7»;
е) F — «сумма очков равна 8»?
Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C, D, E, F? Какие из этих событий являются элементарными событиями?

780. В опыте из колоды в 36 карт извлекают одну карту. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствует событию:
а) A — «извлечена дама трефовая»;
б) B — «извлечена дама»;
в) C — «извлечена любая карта трефовая»?
Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C? Какие из этих событий являются элементарными событиями?

781. В опыте подбрасывают две монеты. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствует событию:
а) A — «выпало два герба»;
б) B — «выпало две решки»;
в) C — «выпали герб и решка»?
Какие исходы опыта благоприятствуют каждому из событий A, B, C? Какие из этих событий являются элементарными событиями?

782. В опыте из колоды в 36 карт извлекают две карты. Сколько исходов благоприятствует событию:
а) A — «извлечены две карты чёрной масти»;
б) B — «извлечены две карты красной масти»;
в) C — «извлечены две карты: одна чёрной масти, другая красной»?

783. Сколько событий может произойти в опыте подбрасывания игрального кубика?

14.2. Вероятность случайного события

Как было сказано в предыдущем пункте, если в данном опыте возможно n исходов, то любое случайное событие A в нём произойдёт, если будет получен один из k заранее определённых исходов, благоприятствующих событию A, где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Например, в опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) событию A — «выпало число очков, кратное трём» благоприятствуют только два исхода: «выпало 3 очка» и «выпало 6 очков».

> Вероятностью случайного события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов в данном опыте.

Вероятность события A обозначают $P(A)$. Если в опыте возможны n исходов и событию A благоприятствуют m из них, то вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

В приведённом выше примере $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

В этом же опыте событию B — «выпало простое число очков» благоприятствуют только 3 исхода: «выпало 2 очка», «выпало 3 очка» и «выпало 5 очков», поэтому $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

а событию C — «выпало 5 очков» благоприятствует только 1 исход: «выпало 5 очков», поэтому $P(C) = \frac{1}{6}$.

Если события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — это все элементарные равновозможные события данного опыта, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$P(B_k) = \frac{1}{n}.$$

Невозможное событие обозначают $\varnothing$. Так как невозможному событию благоприятствуют 0 исходов, то вероятность невозможного события равна

$$P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

Достоверное событие обозначают Ω. Так как достоверному событию благоприятствуют все n исходов, то вероятность достоверного события равна

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

Вероятность любого события D удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant P(D) \leqslant 1$.

Задача 1. Пусть одновременно подбрасываются две монеты. Одинаковую ли вероятность имеют следующие события:

A — «выпало два герба»; B — «выпало две решки»;

C — «выпал один герб и одна решка»?

Решение. При подбрасывании двух монет возможны исходы, приведённые в таблице. Из таблицы видно, что имеется 4 равновозможных исхода.

Исходы	Монета 1	Монета 2
1	герб	герб
2	герб	решка
3	решка	герб
4	решка	решка

Событию A благоприятствует только первый исход, событию B благоприятствует только четвёртый исход, а событию C благоприятствуют два исхода — второй и третий. Поэтому

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{4}; \quad P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $P(C) > P(A)$, $P(C) > P(B)$, $P(A) = P(B)$.

Задача 2. Каждый из двух игроков подбрасывает по игральному кубику.

а) Первый игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 6 очков. Второй игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 7 очков. Одинаковы ли вероятности выигрыша для каждого из игроков?

б) Первый игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 6 очков. Второй игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 8 очков. Одинаковы ли вероятности выигрыша для каждого из игроков?

Решение. Исходы при подбрасывании двух кубиков соответствуют парам чисел (n_1; n_2), где n_1 — число очков, выпавших на первом кубике ($n_1 = 1$; 2; ...; 6), n_2 — число очков, выпавших на втором кубике ($n_2 = 1$; 2; ...; 6). Всего таких пар, а следовательно, и исходов будет $6 \cdot 6 = 36$. Все 36 исходов равновозможны.

Пусть событие A — «выпало на двух кубиках в сумме 6 очков». Этому событию благоприятствуют 5 исходов:

$$(1;\ 5),\ (2;\ 4),\ (3;\ 3),\ (4;\ 2),\ (5;\ 1).$$

Пусть событие B — «выпало на двух кубиках в сумме 7 очков». Этому событию благоприятствуют 6 исходов:

$$(1;\ 6),\ (2;\ 5),\ (3;\ 4),\ (4;\ 3),\ (5;\ 2),\ (6;\ 1).$$

Пусть событие C — «выпало на двух кубиках в сумме 8 очков». Этому событию благоприятствуют 5 исходов:

$$(2;\ 6),\ (3;\ 5),\ (4;\ 4),\ (5;\ 3),\ (6;\ 2).$$

а) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие A. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие B. Так как

$$P(A) = \frac{5}{36};\quad P(B) = \frac{6}{36},$$

то вероятность выигрыша у второго игрока больше, чем вероятность выигрыша у первого игрока.

б) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие A. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие C. Так как

$$P(A) = \frac{5}{36};\quad P(C) = \frac{5}{36},$$

то вероятности выигрыша для каждого из игроков одинаковы.

При вычислении вероятности случайного события часто пользуются формулами перестановок, размещений и сочетаний.

Задача 3. Один игрок записал четырёхзначное число, используя различные цифры, кроме нуля. Какова вероятность того, что второй игрок угадает это число с первого раза?

Решение. Выясним, сколько четырёхзначных чисел можно записать, используя только один раз цифры 1, 2, 3, ..., 9. Так как любое из этих четырёхзначных чисел является размещением из 9 цифр по 4, то искомое количество чисел равно $A_4^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Таким образом, можно считать, что рассматривается опыт, в котором возможны 3024 исхода, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события A — «угадать один из этих исходов». Как следует из вышеизложенного, $P(A) = \frac{1}{3024}$.

Ответ: $\frac{1}{3024}$.

Задача 4. В праздничной школьной лотерее предлагается угадать n чисел из k. Определите, в какой лотерее вероятность выигрыша больше: в лотерее «2 из 5» или «3 из 6».

Решение. Выясним, сколько существует способов угадать 2 числа из 5. Так как порядок угаданных чисел не важен, то искомое число способов есть число сочетаний из 5 по 2. Оно равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

Аналогично число способов угадать 3 числа из 6 есть число сочетаний из 6 по 3. Оно равно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Таким образом, можно считать, что рассматривается два опыта. В первом возможны 10 исходов, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события A — «угадать один из этих исходов», поэтому $P(A) = \frac{1}{10}$. Во втором возможны 20 исходов, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события B — «угадать один из этих исходов», поэтому $P(B) = \frac{1}{20}$. Так как $\frac{1}{10} > \frac{1}{20}$, то вероятность выигрыша больше в лотерее «2 из 5».

Ответ: вероятность выигрыша больше в лотерее «2 из 5».

784. Ваня, Маша и Петя хотят купить три билета в кино на соседние места. Какова вероятность того, что место Маши окажется посередине, если она выберет один билет из трёх случайным образом?

785. Три карты: валет (В), дама (Д), король (К) — перемешали и положили в ряд «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:
а) они окажутся в порядке ВДК;
б) на первом месте окажется Д;
в) на последнем месте окажется Д;
г) на всех трёх местах окажется Д?

786. Четыре карты: валет (В), дама (Д), король (К), туз (Т) — перемешали и положили в ряд «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:
а) они окажутся в порядке ТКДВ;
б) на первом месте окажется Т;
в) на последнем месте окажется Т?

787. Иванов и Степанов входят в группу из семи студентов, имеющих одинаковые шансы получить один из двух разных призов. Какова вероятность того, что:
а) Иванов получит первый приз, а Степанов — второй;
б) Иванов и Степанов получат призы;
в) Иванов получит первый приз;
г) Иванов получит один из двух призов?

788. Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что в эту четвёрку:
а) попадут тузы: бубновый, пиковый, червовый и трефовый в указанном порядке;
б) попадут 4 туза (в любом порядке);
в) попадёт туз бубновый и его возьмут первым;
г) попадёт туз бубновый?

789. В лотерее предлагается угадать n чисел из k. В какой лотерее вероятность выигрыша больше: «6 из 49» или «5 из 36»?

790. В некотором царстве, в некотором государстве разбойника приговорили к смертной казни, и он подал царю прошение о помиловании. Добрый царь, большой знаток теории вероятностей, сказал: «Доверимся случаю, пусть разбойник сам решит свою судьбу. Выдайте ему мешок с полным набором костей домино и две игральные кости. Пусть он вытащит из мешка не глядя одну кость домино или бросит две игральные кости — по своему выбору. Если полученная в этом испытании сумма очков окажется равной числу, которое он назовёт до начала испытания, то быть по сему — пусть живёт». Какой вид испытания должен выбрать разбойник и какую сумму назвать, чтобы вероятность остаться живым оказалась наибольшей?

14.3. Сумма, произведение и разность случайных событий

Будем рассматривать некоторый случайный опыт и события A, B, C, ... в нём.

Суммой (или объединением) двух событий A и B называют событие C, обозначаемое $A + B$ (или $A \cup B$), состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B, т. е. произошло или событие A, или событие B.

Так, в опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) суммой события A — «выпало простое число очков» и события B — «выпало число очков, кратное трём» является событие $C = A + B$ — «выпало либо 2, либо 3, либо 5, либо 6 очков».

Произведением (или пересечением) двух событий A и B называют событие D, обозначаемое $A \cdot B$ (или $A \cap B$), состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B.

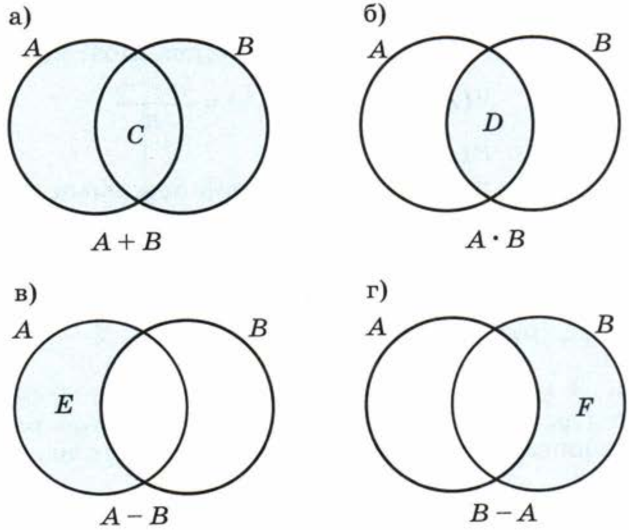


Рис. 92

Так, в опыте 2 произведением тех же событий A и B является событие $D = A \cdot B$ — «выпало 3 очка».

Разностью двух событий A и B называют событие E, обозначаемое $A - B$ (или $A \setminus B$), состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B.

Так, в опыте 2 разностью событий A и B является событие $E = A - B$ — «выпало или 2, или 5 очков». А разностью событий B и A является событие $F = B - A$ — «выпало 6 очков».

Всё сказанное можно интерпретировать на языке теории множеств. Так, в опыте 2 событие A задаётся подмножеством $M_1 = \{2, 3, 5\}$ множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, событие B — подмножеством $M_2 = \{3, 6\}$ того же множества Ω. Тогда сумма событий A и B задаётся множеством $M_3 = M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 5, 6\}$, произведение событий A и B задаётся множеством $M_4 = M_1 \cap M_2 = \{3\}$, разность событий A и B задаётся множеством $M_5 = M_1 \setminus M_2 = \{2, 5\}$, а разность событий B и A задаётся множеством $M_6 = M_2 \setminus M_1 = \{6\}$.

События $A + B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ принято изображать с помощью диаграмм Эйлера — Венна (рис. 92).

Событие называют **противоположным** событию A, если оно состоит в том, что не произошло событие A. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Очевидно, что событие, противоположное событию $\overline{A}$, есть событие A, т. е. $\overline{\overline{A}} = A$.

Событию $\overline{A}$ благоприятствуют все исходы, которые не благоприятствуют событию A. Если событию A благоприятствуют

m исходов из n равновозможных исходов в некотором опыте, то событию $\overline{A}$ благоприятствуют $n - m$ исходов. Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ а } P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n},$$

откуда следует, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

События A и $\overline{A}$ называют **противоположными** событиями.

В опыте 2 рассмотрим событие B — «выпало число очков, кратное 3», $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ему противоположным является событие $\overline{B}$ — «выпало число очков, равное либо 1, либо 2, либо 4, либо 5». Поэтому $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

События A и $\overline{A}$ исчерпывают все n равновозможных исходов в данном опыте, т. е. событие $A + \overline{A}$ есть достоверное событие Ω (сумма противоположных событий есть достоверное событие):

$$A + \overline{A} = \Omega,$$

поэтому событие $\overline{A}$ есть разность событий Ω и A: $\overline{A} = \Omega - A$.

791. В опыте первый ученик просит второго случайным образом назвать однозначное натуральное число. Рассматриваются события: A — «названо чётное число», B — «названо нечётное число», C — «названо число, кратное 3», D — «названо простое число». Сколько исходов в этом опыте благоприятствует событию:

а) $A + B$;	б) $A \cdot B$;	в) $A - B$;	г) $B - A$;
д) $A + C$;	е) $A \cdot C$;	ж) $A - C$;	з) $C - A$;
и) $D + B$;	к) $D \cdot B$;	л) $D - B$;	м) $B - D$?

792. В предыдущем задании найдите события противоположные событиям A, B, C и D, а также достоверные и невозможные события. Вычислите вероятность каждого события.

793. Спортивный комментатор оценил вероятность победы лыжника Иванова в 90%. Какова вероятность (по оценке спортивного комментатора) того, что Иванов не победит?

794. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

795. В опыте бросают игральный кубик. Какова вероятность события:

а) M — «не выпало простое число очков»;
б) N — «не выпало число очков, кратное 3»;
в) K — «не выпало число очков, кратное 2 или 3»?

14.4. Несовместные события. Независимые события

События A и B, которые не могут произойти одновременно в одном и том же опыте, называют **несовместными** событиями.

В опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) события A — «выпало нечётное число очков» и B — «выпало число очков, кратное 4» несовместные события.

События A и B несовместны тогда и только тогда, когда произведение этих событий есть невозможное событие, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$.

На языке теории множеств это означает, что события A и B несовместны тогда и только тогда, когда подмножества M_1 и M_2 множества Ω, которые определяют события A и B соответственно, не имеют общих элементов, т. е. если $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. ●

Для несовместных событий A и B справедлива формула сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{1}$$

т. е. вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают одну карту. События A — «извлечён король» и B — «извлечена дама» — несовместные события. Так как событие $C = A + B$ — «извлечён либо король, либо дама», то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ и $P(C) = P(A) + P(B)$.

Если события A и B не являются несовместными, то к ним нельзя применить формулу (1).

В этом случае справедлива другая формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \tag{2}$$

т. е. вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения.

Заметим, что формула (1) является частным случаем формулы (2), так как для несовместных событий $P(A \cdot B) = 0$.

Задача 1. Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность того, что будет вынута или трефовая карта, или туз?

Решение. Пусть событие A — «вынута трефовая карта», событие B — «вынут туз». Тогда событие $A + B$ — «вынута либо трефовая карта, либо туз», а событие $A \cdot B$ — «вынут трефовый туз». Ясно, что $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{36}$, поэтому по формуле (2)

$$P(A + B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Если два события таковы, что вероятность любого из них не зависит от того, произошло или не произошло другое, то такие события считают независимыми.

Пусть одновременно подбрасываются две монеты. Событие A — «выпал на первой монете герб, а на второй или герб, или решка», событие B — «выпал на второй монете герб, а на первой или герб, или решка». События A и B таковы, что вероятность любого из них не зависит от того, произошло или не произошло другое, поэтому эти события независимы.

Однако сделанный выше вывод основан на интуиции. А определение желательно давать так, чтобы оно не зависело от интуитивных (или каких-либо ещё) соображений. Поэтому в теории вероятностей принято такое определение.

События A и B в рассматриваемом опыте называют **независимыми**, если справедливо равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3}$$

В таблице приведены все исходы рассматриваемого опыта.

Исходы	Монета 1	Монета 2
1	герб	герб
2	герб	решка
3	решка	герб
4	решка	решка

В рассматриваемом опыте событию A благоприятствуют два исхода (1-й и 2-й), событию B благоприятствуют два исхода (1-й и 3-й), поэтому $P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Событию $C = A \cdot B$ — «выпал герб и на первой, и на второй монете» благоприятствует единственный исход (1-й), поэтому $P(C) = \frac{1}{4}$. Так как $P(C) = P\ (A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, то события A и B независимые по определению.

Заметим, что при решении практических задач редко проверяют равенство (3), а обычно пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте. Поэтому в практических задачах независимость событий заранее оговаривают.

Задача 2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,6, а вторым — 0,5. Считая, что попадание в мишень каждого из стрелков является независимым событием (т. е. вероятность попадания в мишень каждым стрелком не зависит от попадания или непопадания в мишень другим стрелком), определим вероятность попадания в мишень:

а) обоими стрелками;

б) хотя бы одним стрелком.

Решение. Пусть событие A — «мишень поражена первым стрелком», событие B — «мишень поражена вторым стрелком». Тогда событие $A \cdot B$ — «мишень поражена обоими стрелками», событие $A + B$ — «мишень поражена хотя бы одним стрелком».

Так как $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ и события A и B независимые, то по равенству (3)

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3.$$

Применяя формулу (2), получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8.$$

Ответ: вероятность попадания в мишень обоими стрелками равна 0,3, а хотя бы одним стрелком — 0,8.

796. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. Рассматриваются события A — «извлечён король», B — «извлечён валет», C — «извлечена трефовая карта», D — «извлечена бубновая карта». Какие из следующих событий являются несовместными A и B; A и C; B и C; A и D?

797. Приведите примеры несовместных событий в опыте с бросанием игрального кубика.

798. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. Рассматриваются события A — «извлечён король» и B — «извлечён валет». Определите вероятность события $C = A + B$.

799. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. Рассматриваются события A — «извлечён король» и B — «извлечена бубновая карта». Определите вероятности событий A, B, $A \cdot B$. Определите вероятность события D — «извлечён король или бубновая карта».

800. В опыте из тёмного мешка наудачу вынимают кость домино. Событие A — «извлечена кость с суммой очков 7», B — «извлечена кость с суммой очков 5». Определите вероятности событий A, B. Используя найденные вероятности, вычислите вероятность события C — «извлечена кость с суммой очков или 7, или 5».

801. В опыте из тёмного мешка наудачу вынимают кость домино. Рассматриваются события A — «извлечена кость с суммой очков, кратной 2», B — «извлечена кость с суммой очков, кратной 3», C — «извлечена кость с суммой очков, кратной 6». Определите вероятности событий A, B, C. Используя найденные вероятности, вычислите вероятность события D — «извлечена кость с суммой очков, кратной или 2, или 3».

802. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,7, а вторым — 0,8. Считая, что попадание в мишень каждого из стрелков является независимым событием, определите вероятность попадания в мишень:
а) обоими стрелками; б) хотя бы одним стрелком.

14.5. Частота случайных событий

Пусть в результате опыта может произойти событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$, $0 < p < 1$. Повторим опыт n раз, и пусть при этом событие A произойдёт m раз. Число $\frac{m}{n}$ называют **относительной частотой** события A.

Математики Ж. Бюффон и К. Пирсон провели многократные опыты с бросанием монеты. Их результаты приведены в таблице.

	Число бросаний	Число выпаданий герба	Относительная частота выпадания герба
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	12 000	6019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Как видно из таблицы, относительная частота выпадания герба, полученная в опытах Бюффона и Пирсона, мало отличается от вероятности выпадания герба в указанном эксперименте, равной 0,5.

Не всегда удаётся определить вероятность p события независимо от опыта, как это имеет место с бросанием монеты или игральной кости. Но если возможно опыт повторить n раз, то при большом

n относительная частота события $\frac{m}{n}$ может рассматриваться как приближённое значение вероятности $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$ этого события.

При большом количестве опытов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события.

Эту закономерность называют **статистической устойчивостью относительных частот.**

Отметим, что чем больше проводится опытов, тем реже встречается сколько-нибудь значительное отклонение относительной частоты от вероятности.

Замечание. Если относительную частоту события определить как приближённое значение вероятности этого события, то получим так называемое статистическое определение вероятности.

Приведённое в п. 14.2 определение вероятности событий называют классическим определением вероятности.

Существует ещё и аксиоматическое определение вероятности, в котором вероятность задаётся перечислением её свойств. В этом случае вероятность задаётся как функция $P(A)$, определённая на множестве M всех исходов данного опыта, которая (для опытов с конечным числом исходов) удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого события A из M;
2) $P(A) = 1$, если A — достоверное событие;
3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

Теорию, изучающую вероятность событий лишь для опытов с конечным числом исходов, называют **элементарной теорией вероятностей.**

Конечно, существуют и опыты с бесконечным числом возможных событий. Теорию, изучающую вероятность таких событий, называют **общей теорией вероятностей.**

В общей теории вероятностей свойство 3 понимается в расширенном смысле: $P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$.

Свойства 1—3 называют аксиомами Колмогорова. Именно А. Н. Колмогоров впервые в 1933 г. дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

803. Проведите опыт с бросанием монеты 50 раз. Вычислите относительную частоту выпадания герба. Сравните свой результат с результатами других учащихся вашего класса.

804. Проведите опыт с бросанием игральной кости 60 раз. Вычислите относительную частоту каждого из событий: A — «выпало 6 очков»; B — «выпало чётное число очков».

805. Пятеро учащихся при бросании монеты 50 раз получили данные, приведённые в таблице:

Ученик	Число бросаний	Число выпаданий герба	Относительная частота выпадания герба
1	50	27	0,54
2	50	28	0,56
3	50	23	0,46
4	50	26	0,52
5	50	24	0,48

Вычислите относительную частоту выпадания герба во всех 250 опытах.

Дополнения к главе 5

1. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля

Справедливы следующие формулы:

$$(a+b)^1 = a + b, \qquad (1)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (3)$$

Покажем, что

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \qquad (4)$$

Действительно, применяя формулу (3) и перемножая многочлены, имеем:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Рассматривая формулы (1)—(4), можно заметить, что при разложении $(a+b)^n$ в многочлен получается сумма членов a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ..., ab^{n-1}, b^n с некоторыми коэффициентами. Для нахождения этих коэффициентов часто применяют **треугольник Паскаля**.

Он устроен так. В его нулевой строке стоит единица, в первой строке стоят две единицы, далее в каждой следующей строке по краям стоят единицы, а каждое из оставшихся $(n-1)$ чисел n-й строки равно сумме двух чисел, записанных над ним в предыдущей строке.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
...	

Используя треугольник Паскаля, получим

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \quad (5)$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6. \quad (6)$$

Конечно, используя треугольник Паскаля, можно найти разложение $(a + b)^n$ в многочлен для любого натурального n. Но этот процесс для больших n достаточно трудоёмок. Кроме того, надо обосновать правильность треугольника Паскаля. Поэтому приведём общую формулу.

Для любого натурального числа n справедлива формула, называемая **формулой бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\, ab^{n-1} + b^n, \quad (7)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Слагаемые суммы в правой части называют членами разложения бинома Ньютона. Член a^n называют нулевым членом разложения бинома Ньютона, далее идут первый, второй и т. д. члены до n-го (равного b^n) включительно; k-й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Числа C_n^k называют также **биномиальными коэффициентами.**

Можно доказать, что коэффициенты C_n^k действительно равны соответствующим числам n-й строки треугольника Паскаля.

Формулу (7) можно доказать комбинаторным способом. Рассмотрим сначала произведение

$$(a + x_1)(a + x_2) \ldots (a + x_n). \quad (8)$$

Раскроем скобки в произведении (8):

$$\begin{gathered}(a + x_1)(a + x_2) \ldots (a + x_n) = \\ = a^n + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \\ + a^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) + \\ + a^{n-3}(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \ldots + x_1x_2x_3 \ldots x_n.\end{gathered} \quad (9)$$

Заменив все x_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ на b, получим

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + C_n^3\, a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^{n-1}\, ab^{n-1} + b^n,$$

т. е. формулу (7).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках в правой части равенства (9) равно $n = C_n^1$ (каждое из них равно b). Слагаемые во вторых скобках есть всевозможные сочетания из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по два, их количество равно C_n^2 (каждое из них равно b^2). Слагаемые в третьих скобках есть всевозможные сочетания из указанных элементов по три, их количество равно C_n^3 (каждое из них равно b^3). И так далее.

2. Исторические сведения

Изучение математических рукописей Древнего Египта и Вавилона показывает, что ещё в глубокой древности возникли некоторые приёмы приближённых вычислений. Под влиянием развития астрономии, мореплавания и техники методы приближённых вычислений совершенствовались.

Большие заслуги в развитии теории приближённых вычислений имеет российский академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), который писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приёмы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Чтобы в приближённых вычислениях можно было из самой записи приближённого числа судить о степени его точности, А. Н. Крылов предложил следующее правило: «Приближённое число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надёжными», т. е. верными.

А. Н. Крылов

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий.

В настоящее время приближённые вычисления используются для расчёта полётов космических аппаратов, в подготовке прогноза погоды и т. п. Эти расчёты ведутся с помощью ЭВМ.

Термин «статистика» введён в науку в XVIII в. Однако статистический учёт вёлся намного раньше: проводились переписи населения в Древнем Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала государств, вёлся учёт имущества граждан в Древнем Риме и т. п. Первой опубликованной статистической информацией можно считать глиняные таблички Шумерского царства (III—II тысячелетия до н. э.).

Вначале под статистикой понимали описание экономического и политического состояния государства или его части. Например, к 1792 г. относится определение: «статистика описывает состояние государства в настоящее время или в некоторый известный момент в прошлом». Однако постепенно термин «статистика» стал использоваться более широко. По словам Наполеона Бонапарта, «статистика — это бюджет вещей». Тем самым статистические методы были признаны полезными не только для административного управления, но и для применения на уровне отдельного предприятия. Согласно формулировке 1833 г., «цель статистики заключается в представлении фактов в наиболее сжатой форме». Во второй половине XIX — начале XX в. сформировалась научная дисциплина — математическая статистика, являющаяся частью математики.

Наука статистика использует математический аппарат, который не изучается в школе. Заметим, что статистика не ограничивается целочисленными данными и даже только точными данными, поэтому так важно уметь выполнять приближённые вычисления и знать правила приближений. Методы статистики позволяют не только фиксировать уже имеющиеся данные, но и на их основе делать прогноз на будущее. Вот почему эта наука так важна и ей уделяли должное внимание во все времена.

Статистика разрабатывает специальные методы исследования и обработки материалов — массовые статистические наблюдения, методы графических изображений и другие методы анализа статистических данных. В ней большое внимание уделяется доступности и наглядности информации как для специалистов, принимающих ответственные решения, так и для обычных граждан. Воздействие наглядно и доступно представленных статистических данных и выводов на людей так велико, что к статистике иногда прибегают в недобросовестной рекламе товаров и услуг («эти духи покупает каждая десятая женщина») и даже в политике, где с помощью статистики можно манипулировать общественным мнением. Известно высказывание, приписываемое Б. Дизраэли, премьер-министру Великобритании времён королевы Виктории: «Существуют три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика». Разумеется, здесь речь идёт о недобросовестном использовании статистики.

Комбинаторика возникла в XVI в. — в то время были очень распространены азартные игры, в процессе которых выяснялось, например, что некоторая сумма очков при бросании двух игральных костей выпадает чаще других, а также другие факты, знание которых могло способствовать выигрышу. Интерес к различным проблемам азартных игр и был первоначальным стимулом к развитию комбинаторики. Никколо Тарталья (ок. 1499—1557) одним из первых занялся подсчётом числа различных комбинаций при


А. Н. Колмогоров

игре в кости. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Джеролано Кардано (1501—1576), Блеза Паскаля (1623—1662), Пьера Ферма (1601—1665), Якоба Бернулли (1654—1705), Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716), Леонарда Эйлера (1707—1783).

В работах Б. Паскаля, П. Ферма, Я. Бернулли и других математиков XVII в. были заложены основы новой математической теории — теории вероятностей.

В XVIII в. и начале XIX в. развитие теории вероятностей было продолжено в работах А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1821), К. Гаусса (1777—1855), С. Пуассона (1781—1840) и др.

Во второй половине XIX в. выдающиеся результаты в области теории вероятностей были получены русскими учёными П. Л. Чебышёвым (1821—1894), А. А. Марковым (1856—1922), А. М. Ляпуновым (1857—1919) и др. В работах П. Л. Чебышёва был решён ряд важных задач и были разработаны новые методы их решения, что послужило фундаментом для дальнейшего развития теории вероятностей.

Фундаментальный вклад в развитие теории вероятностей внёс выдающийся математик XX столетия Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987). В 1933 году А. Н. Колмогоров впервые дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

А. Н. Колмогоров уделял большое внимание проблемам школьного математического образования. Им была основана школа-интернат физико-математического профиля при МГУ для способных школьников всей страны. Теперь эта школа носит имя А. Н. Колмогорова.

Задания для повторения

Числа

806. Отметьте на координатной оси числа:

а) 0; 0,1; 0,2; 0,35; 0,7; 0,95; 1,05;

б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{8}$; $1\frac{1}{16}$.

807. Сравните числа:

а) 6 и 4; б) 7,1 и 7,(09); в) $\frac{1}{4}$ и 0,25;

г) $\frac{2}{3}$ и 0,6; д) -2 и $-2,2$; е) $-3,(5)$ и $-3,5$.

Вычислите (**808—811**):

808. а) 2^5; б) 2^6; в) $(-2)^4$; г) $(-2)^5$;

д) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; ж) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; з) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.

809. а) $2^3 : 4^2 - (-2)^3$; б) $(-3)^2 + 3^3 : 9^2$;

в) $(12,5)^2 - \frac{1}{4}$; г) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

810. а) $\dfrac{\left(7\frac{1}{3}\right)^2 - \left(2\frac{2}{3}\right)^2}{\left(5\frac{7}{9}\right)^2 - \left(4\frac{2}{9}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(7\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^2}{\left(17\frac{11}{14}\right)^2 - \left(11\frac{3}{14}\right)^2}$.

811. а) $\left(\frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2}\right) : \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{7}{9}$;

б) $\left(\frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2}\right) : \left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right) \cdot 2009^2$;

в) $\left(\frac{1}{2010^2} - \frac{1}{2011^2}\right) : \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) \cdot \frac{2011}{4021}$.

812. Верно ли равенство:

а) $\left(2\frac{3}{7} - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{7}{24} = \left(\frac{3}{8} + 1\frac{13}{16}\right) : 4\frac{3}{8}$;

б) $\left(5\frac{2}{11} - \frac{9}{11}\right) \cdot \frac{5}{24} = \left(\frac{3}{22} + \frac{57}{33}\right) : 2\frac{1}{20}$;

в) $123{,}456 \cdot 98{,}7654 \cdot 2{,}0017 = 1{,}23456 \cdot 98765{,}4 \cdot 0{,}20017$;
г) $135{,}79 \cdot 2{,}468 \cdot 0{,}2009 = 13{,}579 \cdot 200{,}9 \cdot 0{,}2468$?

813. Докажите, что значение дроби равно нулю:

а) $\dfrac{(1{,}08 - 1{,}33) \cdot 18 + 0{,}6 : \dfrac{2}{15}}{20{,}1 \cdot 0{,}1 - 2{,}1}$; б) $\dfrac{(2{,}14 - 1{,}39) \cdot 1{,}2 - 0{,}75 : \dfrac{5}{6}}{12{,}1 : 0{,}1 - 1{,}2}$;

в) $\dfrac{\left(2\dfrac{3}{7} - 2\dfrac{13}{14}\right) \cdot 3\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{51} \cdot 17}{3\dfrac{5}{7} \cdot 2\dfrac{1}{2} - 6\dfrac{5}{14}}$; г) $\dfrac{\left(4\dfrac{1}{5} - 5\dfrac{1}{2}\right) : 2\dfrac{1}{6} + \dfrac{303}{304} : \dfrac{505}{304}}{7\dfrac{1}{5} \cdot 5\dfrac{1}{2} - 39{,}1}$.

Вычислите **(814—817)**:

814. а) $\dfrac{8{,}4 \cdot \left(1\dfrac{5}{8} + \dfrac{17}{18}\right) - 15\dfrac{59}{60}}{646{,}8 : 21}$; б) $\dfrac{\left(1\dfrac{13}{16} + 1\dfrac{17}{24}\right) \cdot \dfrac{4}{13}}{28\dfrac{14}{15} : 2{,}8 - 4\dfrac{11}{12}}$;

в) $\dfrac{4{,}58 + 6{,}275 : (1{,}25^3 - 1{,}25^2 \cdot 0{,}45)}{49{,}533 : 16{,}5 + 2{,}522}$;

г) $\dfrac{1{,}476 + 2{,}08 \cdot 4{,}05}{49{,}938 : (0{,}16 \cdot 12{,}34^2 - 0{,}16^3) - 0{,}25}$;

д) $\dfrac{42{,}5904 : 6{,}08 - 1{,}245}{(18{,}2^2 - 5{,}6^2 + 23{,}8 \cdot 7{,}4) : 5{,}95 + 35{,}2}$.

815. а) $\dfrac{(35{,}814 : 7{,}05 + 2{,}12) \cdot 0{,}15}{1{,}6 + 187{,}5 : (16{,}25^2 \cdot 3{,}75 - 3{,}75^3)}$;

б) $\dfrac{(0{,}73^3 - 0{,}73 \cdot 0{,}27^2) : 0{,}023 + 2{,}4}{(18{,}544 : 3{,}05 - 1{,}83) \cdot 0{,}16}$.

816. а) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2007 - 2008 + 2009 - 2010$;
б) $2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 2006 - 2008 + 2010 - 2012$.

817. а) $2 - \dfrac{1000}{1001} + \dfrac{999}{1001} - \dfrac{998}{1001} + \dfrac{997}{1001} - \dfrac{996}{1001} + \ldots + \dfrac{1}{1001}$;

б) $5 - \dfrac{1002}{1003} + \dfrac{1001}{1003} - \dfrac{1000}{1003} + \dfrac{999}{1003} - \dfrac{998}{1003} + \ldots + \dfrac{35}{1003}$.

818. Запишите числа в виде десятичных дробей и расположите их в порядке возрастания: $\dfrac{20}{41}, \dfrac{15}{37}, \dfrac{5}{21}, \dfrac{17}{42}$.

819. а) Запишите в порядке возрастания числа:
3,(007); –0,2303003000...; 3,(0008); 3,(009); –0,23(1); –0,231(07).
б) Запишите в порядке убывания числа:
–2,(05); –2,0(5); –0,00(1); –0,(001); $-2\dfrac{1}{20}$; –0,001.

820. Округлите до третьего знака после запятой следующие числа:
а) 37,57891; б) 0,002576; в) –117,00992;
г) 0,3(9); д) –31,72(13); е) 0,00(08).

821. Округлите число 87,5562 до сотых с недостатком и с избытком. Определите абсолютную и относительную погрешности каждого приближения.

822. Запишите в виде десятичной дроби с точностью до 0,01 числа:
а) $1\frac{2}{3}$; б) $2\frac{5}{6}$; в) $\frac{20}{41}$; г) $\frac{5}{7}$.

823. Как можно записать, что:
а) приближённым значением числа a является число a_1 с точностью до 1;
б) приближённым значением числа a является число a_1 с точностью до h?

824. а) Если $5{,}23 \leqslant a \leqslant 5{,}27$, то чему равны приближения снизу (с недостатком) и сверху (с избытком)?
б) Если $0{,}256 \leqslant a \leqslant 0{,}258$, то может ли a быть равным: 0,2574; 0,2579; 0,256; 0,258?

825. Известно, что $0{,}25 \leqslant a \leqslant 0{,}27$. Приведите примеры возможных точных значений a.

826. Вычислите приближённо с точностью до 0,1:
а) 0,385 + 3,7; б) 586,(5) + 3,7(8);
в) 0,38426 – 0,151892; г) 78,54289 – 3,78254;
д) 2,875684 · 0,3867; е) 2,333... · 0,28567;
ж) 78,56634 : 0,5048; з) 4,2534 : 1,38456.

827. Докажите, что число $(10^{27} + 5)$ делится нацело на 3.

828. Запишите общую формулу чисел, которые при делении и на 3, и на 4 дают остаток 1.

829. Запишите общую формулу чисел, которые при делении и на 10, и на 7 дают остаток 2.

830. Найдите условие, при котором сумма данного двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

831. Найдите условие, при котором разность между данным двузначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

832. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечётных двузначных чисел?

833. Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел от 1 до 20?

834. Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Доказываем (835—838).

835. Докажите, что сумма двух последовательных чётных чисел не делится на 4.

836. Докажите, что разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9. Делится ли эта разность на 27?

837. Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел не может быть равным $25k + 1$ ни при каком натуральном k.

838. Докажите, что если некоторое число при делении на 9 даёт остаток 1 или 8, то квадрат этого числа при делении на 9 даёт остаток 1.

839. Представьте ab в виде разности квадратов двух выражений.

840. Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

841. Найдите x и y, зная, что $xy = 1$ и что $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

842. Найдите цифры a и b пятизначного числа $\overline{42a4b}$, если известно, что это число делится нацело на 72.

843. На какую цифру оканчивается число 7^{100}?

844. Какой цифрой оканчивается сумма $21^4 + 34^4 + 46^4$?

845. **Доказываем.** Докажите, что если $n > 1$ и n — нечётное число, то число вида $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ делится нацело на 128.

846. Может ли быть целым числом выражение $\dfrac{a+9}{a+8}$? Если да, то при каком значении a (a — целое число)?

847. Какое число больше:

а) $\dfrac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1}$ или $\dfrac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1}$; б) $\dfrac{a^n+1}{a^{n+1}+1}$ или $\dfrac{a^{n+1}+1}{a^{n+2}+1}$,

где a и n — натуральные числа?

848. *Задача Архимеда (287—212 гг. до н. э.).* Найдите сумму квадратов первых n натуральных чисел.

849. а) Найдите сумму квадратов первых n чётных чисел.
б) Найдите сумму квадратов первых n нечётных чисел.

850. *Старинная задача (Индия, IV в.).* Найдите сумму кубов первых n натуральных чисел.

Доказываем (851—855).

851. а) Докажите, что трёхзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.
б) Докажите, что четырёхзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами, делится на 101.

852. Докажите, что при любом целом значении k число $k^3 + 3k^2 + 2k$ делится на 6.

853. Докажите, что если A — любое нечётное число, то число $A^2 - 1$ делится на 8.

854. Докажите, что если в трёхзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и само число делится на 7.

855. Докажите, что если B — целое число, то число $B^2(B^2 - 1)$ делится на 4.

856. Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом, а при умножении на 3 — кубом целого числа.

857. Расшифруйте равенство ** + *** = ****, если каждое из слагаемых и сумма не изменяются при чтении их справа налево.

858. Трёхзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести на первое место (на место сотен), то полученное число будет на 1 больше утроенного первоначального числа. Найдите это число.

859. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

860. Сумма двух натуральных чисел больше 360, но меньше 400. Наибольший общий делитель этих чисел — 32. Найдите эти числа, если ни одно из них не является делителем другого.

861. Найдите два целых числа, зная, что их сумма 168, а наибольший общий делитель 24.

Доказываем (862—864).

862. Докажите, что если $A + B + C = 0$, то $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

863. Докажите, что если число при делении на 9 даёт остаток 3 или 6, то куб этого числа делится на 9. Делится ли куб этого числа на 27?

864. а) Докажите, что если k — натуральное число, большее 4, то число $k^4 - 4k^3 - 4k^2 + 16k$ делится на 384.
б) Докажите, что если k — натуральное число, большее 2, то число $k^5 - 5k^3 + 4k$ делится на 120.

Вычислите **(865—866)**:

865. а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}) + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$;
б) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - 2\sqrt{5} + \sqrt{10} - 5\sqrt{2}$.

866. а) $(2\sqrt{38} - \sqrt{57}) \cdot \frac{2}{19} \cdot \sqrt{19} + \sqrt{12}$; б) $(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20}$;
в) $\sqrt{200} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$; г) $\frac{1}{5}\sqrt{300} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{75}$.

867. Найдите целое число — значение выражения:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$;

в) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$.

868. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}+\sqrt{11+2\sqrt{10}}$;

в) $\sqrt{8+\sqrt{28}}+\sqrt{8-\sqrt{28}}$; г) $\sqrt{9-\sqrt{17}}+\sqrt{9+\sqrt{17}}$.

869. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$;

б) $30\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}+2\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[4]{0{,}0016}$.

870. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{3}}}$.

871. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{3\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

872. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{4}{2-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+1)$;

б) $\left(\dfrac{4\cdot 2^2+9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{8^0+\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^{-1}}+(1-3^0)^2\right)^{-2}$.

Упростите выражение (**873—878**):

873. а) $\sqrt[3]{8^{-3}}$; б) $\sqrt[5]{4^{-5}}$; в) $\sqrt[4]{16^{-5}}$; г) $\sqrt[6]{64^{-3}}$;

д) $\sqrt[10]{3^{-5}}$; е) $\sqrt[12]{4^{-6}}$; ж) $\sqrt[6]{12^{-3}}$; з) $\sqrt[8]{3^{-4}}$.

874. а) $\sqrt{7^{-3}}\cdot\sqrt{7^5}$; б) $\sqrt[3]{4^7}\cdot\sqrt[3]{4^{-1}}$; в) $\sqrt[4]{6^{-2}}\cdot\sqrt[4]{6^{-4}}$; г) $\sqrt[5]{3^{-8}}\cdot\sqrt[5]{3^{-2}}$.

875. а) $\sqrt[3]{5^{-3}}:\sqrt[3]{5^6}$; б) $\sqrt[4]{9}:\sqrt[4]{9^{-8}}$; в) $\sqrt[6]{7^{-2}}:\sqrt[4]{7^{-4}}$; г) $\sqrt[8]{2^{-10}}:\sqrt[8]{2^{-12}}$.

876. а) $\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[5]{4^3}$; б) $\sqrt[7]{4^2}\cdot\sqrt[7]{4^6}$; в) $\sqrt[3]{12^2}\cdot\sqrt[3]{3^4}$; г) $\sqrt[5]{7^4}\cdot\sqrt[5]{7^4}$.

877. а) $\dfrac{\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{4^3}}{\sqrt[4]{4^5}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{4^5}}{\sqrt[3]{4^{-1}}}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{9^2}}{\sqrt[5]{9^{-1}}}$.

878. а) $\dfrac{2^{-3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{2^{-2}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}}$; б) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 3^{-1}+(-1{,}51)^{0}}{16^{0}\cdot 2^{-2}}$.

879. Сравните числа, укажите их на координатной оси:

а) $0{,}26$; $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}$; $(0{,}(24))^{0}$; б) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{3}$; $-(0{,}(1))^{0}$; $-0{,}12$;

в) $(\sqrt{4})^2$; π^2; $(-1{,}2)^2$; г) $(-3)^2$; $\sqrt{81}$; $\dfrac{1008}{18}$.

880. Докажите, что:

а) $5 < \sqrt{26}$; б) $3 < \sqrt{13}$; в) $\sqrt{7} < 2{,}7$;
г) $\sqrt{11} < 3{,}4$; д) $1{,}09 < \sqrt{1{,}2} < 1{,}1$; е) $1{,}4 < \sqrt{2{,}1} < 1{,}45$.

881. Какое из чисел больше:

а) π или $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{8}+\sqrt{2}$?

882. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{320}$; г) $\sqrt{32}$;
д) $\sqrt{175}$; е) $\sqrt{96}$; ж) $\sqrt{12\dfrac{1}{2}}$; з) $\sqrt{\dfrac{1}{0{,}75}}$.

883. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{0{,}6}$; б) $11\sqrt{\dfrac{2}{11}}$; в) $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$; г) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

884. Пользуясь приближённым значением:

а) $\sqrt{2}\approx 1{,}41$, вычислите приближённо $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt{4{,}5}$;

б) $\sqrt{6}\approx 2{,}45$, вычислите приближённо $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

885. Преобразуйте дробь таким образом, чтобы знаменатель не содержал числа под знаком корня:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Упростите выражение **(886—888)**:

886. а) $\sqrt{8}+5\sqrt{9}-3\sqrt{8}+5\sqrt{7}+2\sqrt{8}-6\sqrt{7}$;
б) $7\sqrt{12}-5\sqrt{27}+8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+2\sqrt{108}$;
в) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$;
г) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$.

887. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; б) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; в) $\sqrt{60}:\sqrt{5}$; г) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{30}$.

888. а) $((7\sqrt{2}-5\sqrt{6})-(3\sqrt{8}-4\sqrt{24}))\cdot 3\sqrt{2}$;
б) $((2\sqrt{20}-7\sqrt{8})-(3\sqrt{5}-3\sqrt{18}))\cdot 4\sqrt{10}$.

889. Возведите выражение в степень:
а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; б) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$.

890. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Докажите, что
$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

891. *Задачи М. Штифеля (Германия, 1486—1567).*
а) Проверьте равенство $\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.
б) Упростите выражение $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

892. Изобразите на координатной оси числа:
а) $\sqrt{2}$ и 1,4; б) 1,7 и $\sqrt{3}$;
в) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}+1$; г) $\sqrt{11}$; 3,2; $\sqrt{13}$.

893. Укажите, если возможно, натуральное число, квадратный корень из которого заключён между:
а) 4000 и 4001; б) 400,0 и 400,1; в) 40,00 и 40,01;
г) 1002 и 1003; д) 100,2 и 100,3; е) 10,02 и 10,03.

Буквенные выражения

Пусть через a, b, c, m, n, x, y, z обозначены отличные от нуля числа, при которых выражения имеют смысл. Упростите выражение (**894—899**):

894. а) $a^3\cdot a$; б) $a^5\cdot a^7$; в) $x^{10}\cdot x^{10}$;
г) $x^0\cdot x^4$; д) $ab^2\cdot a^2b$; е) $a^2b^3\cdot a^5b^7$;
ж) $x^4y^5\cdot xy$; з) $x^0y^{10}\cdot x^0y^3$.

895. а) $x^4:x^3$; б) $x^2:x$; в) $m^{17}:m^8$; г) $m^{41}:m^{14}$;
д) $\dfrac{m^6}{m^3}$; е) $\dfrac{n^3}{n^3}$; ж) $\dfrac{a^{11}}{a^{42}}$; з) $\dfrac{b^{14}}{b^{14}}$.

896. а) $(a^2)^3$; б) $(x^3)^5$; в) $(-x^2)^3$; г) $(-a^3)^2$;
д) $(2x^2)^2$; е) $(3a^2)^3$; ж) $\left(\dfrac{1}{3}c\right)^4$; з) $(-2x^2)^3$.

897. а) $(a^5\cdot a^2\cdot a):(a^3\cdot a^7)$; б) $(x^4\cdot x^3\cdot x):(x^3\cdot x^6)$;
в) $(ab^2)^3:(a^2b^4)$; г) $(m^3n^5)^3:(m^9n^{15})$.

898. а) $m^{-1}\cdot m^2$; б) $x^{-2}\cdot x^{-3}$; в) $a^{-10}\cdot a^{-10}$;
г) $b^0\cdot b^{-4}$; д) $y^3:y^{-2}$; е) $x^{-2}:x^{-3}$;
ж) $a^{-10}:a^{-10}$; з) $b^3:b^{-4}$.

899. а) $(2ab^2c^3)^3$; б) $(3a^4x^5)^2$;
в) $(-(-a^2b^{-1})^{-1})^3$; г) $(2(-x^2y^3)^{-1})^{-2}$.

900. Приведите многочлен к стандартному виду:
а) $4x^3 - 2xx^2 - xx^2 + 5x^2 - 5xx + 1$;
б) $3xx^3 - 4x^2x^2 + x^5 - 3xx^2 + 4x - 1$.

Упростите выражение **(901—902)**:

901. а) $(x-1)(x+2)$; б) $(x+3)(x-4)$;
в) $(x-1)(x-2)(x-3)$; г) $(x+3)(x-2)(x+1)$.

902. а) $(x-1)(x+1)$; б) $(x+3)(x-3)$;
в) $(3x-2)(3x+2)$; г) $(2x+3)(2x-3)$;
д) $(x-4)^2$; е) $(2x+1)^2$;
ж) $(x-2)^3$; з) $(x+3)^3$;
и) $x^3 + (x-1)^3$; к) $x^3 - (x+1)^3$.

Разложите на множители **(903—906)**:

903. а) $2x(x-9) - x(x-1)$; б) $3x(x+1) + 2x(x+10)$;
в) $(x-2)(2x+3) - (x-2)(x+1)$;
г) $(x+1)(3x-4) - (x+2)(x+1)$;
д) $(x-2)^2 + 3(x-2)$; е) $(x+1)^2 - 2(x+1)$;
ж) $(2x-3)^2 - (x-1)^2$; з) $(2x+1)^2 - (x-2)^2$.

904. а) $x^2 - 4x + 4$; б) $x^2 - 4x + 5$;
в) $x^2 - 5x + 6$; г) $x^2 - x - 6$;
д) $x^4 - x^2 - 2x - 1$; е) $x^4 - x^2 + 6x - 9$.

905. а) $x^2 + a^2x + \frac{1}{4}(a^4 - b^4)$; б) $4x^2 - 12bx - 4a^2 + 9b^2$;
в) $4x^2 - 3ax + \frac{1}{4}(2a^2 - ab - b^2)$; г) $8x^2 - \frac{2a}{b}(1-2b)x - \frac{a^2}{b}$;
д) $x^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}x + 1$; е) $x^2 + \frac{a^2+b^2}{ab}x + 1$.

906. а) $x^4 + 1$; б) $x^3 - 7x - 6$.

907. Запишите многочлен, корнями которого являются числа:
а) 1; 2; 3; 4; б) −2; −1; 0; 6.

908. Представьте многочлен в виде произведения линейных множителей:
а) $x^3 - 6x$; б) $x - 5x^3$; в) $3x^2 - 25$;
г) $x^3 - 2$; д) $2x^2 + 8x - 7$; е) $3x^2 - 5x + 2$;
ж) $3x^2 - 6x + 12$; з) $8x^3 + 54x + 36x^2 + 27$.

909. Разложите многочлен на линейные множители, считая, что a и b — данные числа:
а) $x^2 - (1+a)x + a$; б) $4x^2 - 2(1+a)x + a$;
в) $2ax^2 - (2+a)x + 1$; г) $6 + (2-3a)x - ax^2$;
д) $(b-2a)x + 2 - abx^2$; е) $b - (a+b^2)x + abx^2$.

910. Разложите многочлен на множители:
а) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$; б) x^4+x^2+1; в) x^8+x^4+1.

911. Многочлен $x^4+2x^3+mx^2+2x+n$ является квадратом другого многочлена. Найдите числа m и n.

Упростите выражение (**912—922**):

912[1]. а) $\dfrac{48m^2ab}{26ma^2b^3}$; б) $\dfrac{64xy^3z^5}{18x^2yz^3}$; в) $\dfrac{128a^0b^{-3}c^9}{32a^6b^{-2}c^{-9}}$; г) $\dfrac{121x^3y^0z^{-5}}{77x^{-8}y^{-4}z^{-2}}$.

913. а) $\dfrac{38a^7b^4c^{12}}{144ab^6c^3}$; б) $\dfrac{144xy^9z^{11}}{24x^5y^7z}$;

в) $\left(\dfrac{(5a^3(b+c))^2\cdot(c-b)^2}{(b^2+2bc+c^2)\cdot 10a^4}\right)^{-1}$; г) $\dfrac{(-1(-2a)^2\cdot b)^2}{(-2a^2)^3\cdot b^4}$.

914. а) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}\right):\dfrac{xy}{x^2-y^2}$; б) $\left(\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}+4m\right)\left(m-\dfrac{1}{m}\right)$.

915. а) $\left(\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}\right)\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-2\right)$; б) $\left(\dfrac{x^2y-y^2x}{x-y}+xy\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$.

916. а) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x-y)+(x+y)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$;

б) $\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right):\left(2-\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{y}{x}+1\right)$.

917. а) $\left(\dfrac{k+1}{k-1}-\dfrac{k-1}{k+1}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{k}{4}-\dfrac{1}{4k}\right)$;

б) $\dfrac{m^3+m^2n+mn^2+n^3}{m^2+2mn+n^2}:\dfrac{m^4-n^4}{(m+n)^3}$.

918. а) $\left(\dfrac{4(a-2)}{a^2-a-6}+\dfrac{a-3}{4-a^2}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{a-1}-\dfrac{2}{a-3}$;

б) $\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{3y+12}{25-y^2}:\left(\dfrac{2y-1}{y^2-25}-\dfrac{y-5}{2y^2+9y-5}\right)$;

в) $\left(\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a}{4-a}+\dfrac{a+8}{a+2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{a^2-4a}+\dfrac{a+3}{a^2-16}\right)\cdot\dfrac{4a-a^2}{a+2}+\dfrac{a+8}{a+4}$;

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

д) $\left(\dfrac{a+3b}{(a-b)^2}+\dfrac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\dfrac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

е) $\left(\dfrac{a+2b}{(a+b)^2}-\dfrac{a-4b}{a^2-b^2}\right):\dfrac{b^2+2ab}{(a+b)^2}$.

919. а) $\left(\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\right):\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\right)$;

б) $\dfrac{a-b}{a(a-2)+4}+\dfrac{8+4(1-a)+a^2}{8+a^3}-\dfrac{1}{2+a}$.

920. а) $a:\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a^2+3a(a-1)-1}{2a^2+2a}\cdot\dfrac{-4a}{a^2+1-2a}-\dfrac{4a^2}{a^2-1}$;

б) $\left(\dfrac{3}{2}-\left(x^4-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right):\dfrac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$.

921. а) $\left(\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}\right):\dfrac{4x+16}{x-2}$;

б) $\left(\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}-\dfrac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\right):\dfrac{4x+10}{5-x}$.

922. а) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{1+x^{16}}$.

923. Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении буквы:

а) $\left(\dfrac{m^3+1}{m+1}-m\right):(1-m^2)-\dfrac{m}{1+m}$ при $m=-\dfrac{1}{3}$;

б) $\left(\dfrac{a^3-8}{a-2}+2a\right):(4-a^2)-\dfrac{a-1}{2-a}$ при $a=\dfrac{2}{5}$.

Найдите значение выражения (**924—927**):

924. а) $\left(1-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(\dfrac{1-2x^2}{1-x}-x-1\right)$ при $x=\dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{m^2-m+1}{m^2-2m+1}:\left(m-\dfrac{1}{1-m}\right)-\dfrac{1}{m^2-m}$ при $m=0{,}07$.

925. а) $(a^2-1)\cdot\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}+1\right)$ при $a=-0{,}03$;

б) $\left(\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{3}{p^3+1}+\dfrac{3}{p^2-p+1}\right)\cdot\left(p-\dfrac{2p-1}{p+1}\right)$ при $p=-\dfrac{1}{3}$.

926. а) $\left(\dfrac{4x}{4-x^2}-\dfrac{x-2}{4+2x}\right)\cdot\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{x}{1-x^2}$ при $x=-1{,}5$;

б) $\dfrac{a}{1-a}-\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{a}{1-a^2}\right)$ при $a=2{,}5$.

927. а) $\left(\dfrac{9}{m^2-9}+\dfrac{3}{(3-m)^2}\right)\cdot\dfrac{(m-3)^2}{6}+\dfrac{6}{3+m}$ при $m=2\dfrac{1}{2}$;

б) $\left(\dfrac{2}{4-p^2}-\dfrac{2}{(p-2)^2}\right)\cdot\dfrac{(2-p)^2}{4}-\dfrac{2}{p+2}$ при $p=1{,}5$.

Доказываем (928—930).

928. Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{5x}{x+y}\cdot\left(\dfrac{xy+y^2}{5x-5y}+xy+y^2\right)-\dfrac{xy}{x-y}=5xy$;

б) $\dfrac{a-5}{6-3a}+\dfrac{4(a+1)}{a^2+4a}:\left(\dfrac{9a}{a^2-16}-\dfrac{a+4}{a^2-4a}\right)=\dfrac{1}{6}$.

929. Докажите, что выражения:

а) $\dfrac{(x-3)^3}{2}-\dfrac{(x+3)^3}{2}$ и $-\dfrac{9(x^2+3)}{4}$;

б) $\left(\dfrac{x-3}{3}\right)^3+\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^3$ и $\dfrac{x(x^2+27)}{27}$

не являются тождественно равными на множестве всех действительных чисел.

930. Докажите, что если $ABC=1$, то

$$\frac{1}{1+A+AB}+\frac{1}{1+AC+C}+\frac{1}{1+B+BC}=1.$$

931. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$; б) $\sqrt[4]{a^2}$; в) $\sqrt[4]{a^4}$; г) $\sqrt[4]{a^{12}}$.

932. Верно ли равенство $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$, если $x\leqslant 1$?

933. При каких a и b верно равенство $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$?

Упростите выражение (934—936):

934. а) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[3]{-x^2}\cdot\sqrt[4]{-x}$;

в) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{a-1}\cdot\sqrt[4]{1-a}\cdot(-\sqrt[3]{a-7})$.

935. а) $5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{-54}-6\sqrt[3]{-128}-7\sqrt[3]{-250}+2\sqrt[3]{432}$;

б) $7\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{-192}+2\sqrt[3]{-375}-\sqrt[3]{1029}$.

936. а) $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x^2} + \sqrt{x^3}$;
б) $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a^2} - 3\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[6]{a^3}$.

937. Сократите дробь:
а) $\dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$; б) $\dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$;
в) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{ax} - \sqrt[3]{ay}}$; г) $\dfrac{n\sqrt[3]{m} - m\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} + 2\sqrt[3]{mn}}$.

Упростите выражение (**938—942**):

938. а) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4b}{a}}$; б) $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{xy^2}{2}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{81}{4}} : (x^3y)$.

939. а) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \cdot \sqrt[3]{a^2}$; б) $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}) \cdot \sqrt[3]{a}$;
в) $(a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}) \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}$; г) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$.

940. а) $\left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}} - \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}\right) : \sqrt{\dfrac{a-b}{a}}$;
б) $\dfrac{a^2b^{-1} - a^{-2}b^3}{a^3b^{-1} + ab} : \dfrac{a^{-1}b - ab^{-1}}{a^3b^{-1}}$.

941. а) $\left(\sqrt[3]{108a^4b^{-1}} - \sqrt[3]{32a^{-2}b^5}\right) : \sqrt[3]{4ab^2}$;
б) $\left(x^2y^3\sqrt[5]{\dfrac{243y^{-4}}{x^{-5}}} + \dfrac{y}{x^{-1}}\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}}{y^{-6}}}\right) : \sqrt[5]{y^{-4}}$.

942. а) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{81x^9}{y^{-2}}} - \dfrac{2}{x^{-1}}\sqrt[3]{\dfrac{3y^2}{8^{-2}x^{-6}}}\right) \cdot \sqrt[3]{\dfrac{y}{3^{-2}}}$;
б) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{128x^3}{y^{-6}}} + x^{-1}y\sqrt[4]{\dfrac{8y^2}{x^{-7}}}\right) \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{4^{-1}y^{-3}}}$.

943. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:
а) $\dfrac{\sqrt{a} + 6}{a - 36} - \dfrac{1}{\sqrt{a} + 6} = \dfrac{12}{a - 36}$;
б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 6} - \dfrac{3}{\sqrt{x} + 6} + \dfrac{x}{36 - x} = \dfrac{3}{\sqrt{x} - 6}$.

944. Внесите множитель под знак корня:
а) $(a-1)\sqrt{\dfrac{3a}{1-a^2}}$, $0 < a < 1$; б) $(2-a)\sqrt{\dfrac{2a}{a-2}}$, $a > 2$.

Упростите выражение (945—947):

945. а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a}$;

в) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$; г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-7}-\frac{4}{\sqrt{m}+7}+\frac{m}{49-m}$.

946. а) $(1-(1-a^{-1}b)^{-1})^{-2}+(1-(1-ab^{-1})^{-1})^{-2}$;

б) $(a+\sqrt{a^2-1})^{-1}+(a-\sqrt{a^2-1})^{-1}$.

947. а) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$;

в) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}+n\right)$; г) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)$.

948. Сократите дробь:

а) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$; г) $\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a+b}$;

д) $\frac{x-x^{0,5}y^{0,5}+y}{x^{1,5}-y^{1,5}}$; е) $\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a+a^{0,5}b^{0,5}+b}$.

949. Упростите выражение:

а) $\frac{(x^{0,5}+y^{0,5})(x^{0,5}+5y^{0,5})-(x^{0,5}+2y^{0,5})(x^{0,5}-2y^{0,5})}{3\sqrt{y}\,(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x-1}$;

в) $\left(\frac{\frac{1}{x}-x}{\left(\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-1\right)}+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$;

г) $\sqrt{x}\left(\frac{x+\sqrt[4]{x^3y^2}+y\sqrt[4]{xy^2}+y^2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})^2}-y\right)^{-1}+\frac{1}{x^{-0,25}y^{0,5}-1}$.

Определите, при каких значениях x имеет смысл выражение (950—952):

950. а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$;

б) $\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}$.

951. а) $\dfrac{\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$;

б) $\dfrac{3^{1,5}}{(3^{0,5})^3a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{5}{6}}+3^{1,5}a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}+3\right)}\cdot\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}\right)$.

952. а) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

Уравнения

953. Решите уравнение:
а) $(x-2)(x-1)(x-3)=0$; б) $(x+1)(x+2)(x-5)=0$;
в) $(2x-3)(4-3x)=0$; г) $(5x-1)(2x+7)=0$.

954. Дан многочлен x^3-5x^2+8x. Известно, что если значение x увеличить на 1, то значение многочлена не изменится. Найдите это значение x.

955. Найдите все значения t, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня:
а) $x^2-6x+t=0$; б) $(t+3)x^2+2(t-1)x+t=0$.

956. Найдите все значения t, при каждом из которых уравнение не имеет действительных корней:
а) $x^2+4x+6t=0$; б) $tx^2-2(t-2)x+t=0$.

957. Найдите все значения t, при каждом из которых квадратное уравнение $2x^2-5x-t=0$ имеет два положительных различных корня.

958. При каких значениях p уравнение $2x^2+x+2p^2=0$:
а) не имеет действительных корней;
б) имеет равные корни;
в) имеет неравные корни?

959. При каких значениях a уравнение $x^2+ax+4=0$ имеет различные корни?

960. При каких значениях m уравнение не имеет действительных корней:
а) $2x^2-3mx+1=0$; б) $3mx^2-x+m=0$;
в) $(m+1)x^2+mx+3+m=0$?

961. При каких значениях m уравнение имеет два равных положительных корня; два равных отрицательных корня:
а) $3x^2+4mx+1=0$; б) $mx^2-(m+1)x+2=0$?

962. При каких значениях t уравнение $x^2 - 2tx + t^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня, заключённые в интервале:
а) $(0; 3)$; б) $(1; 4)$; в) $(-4; 0)$; г) $(-5; -2)$?

963. При каких значениях t уравнение $(t + 1)x^2 + 2(t - 1)x + t - 3 = 0$ имеет два действительных корня:
а) отрицательных; б) положительных;
в) разных знаков, причём положительный корень имеет бóльшую абсолютную величину;
г) разных знаков, причём отрицательный корень имеет бóльшую абсолютную величину?

964. При каких значениях m уравнение $(m - 2)x^2 + (m + 2)x + m = 0$ имеет различные корни?

965. При каких значениях p один из корней квадратного уравнения $x^2 + px - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

966. Найдите значение p, при котором корни уравнения $2x^2 - 5x + p = 0$ удовлетворяют условию

$$\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} = \frac{65}{8}.$$

967. Найдите положительное значение q, при котором корни уравнения $2x^2 + qx - 18 = 0$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{65}{324}.$$

968. Найдите значение p, при котором корни уравнения $6x^2 + 3x - p = 0$ удовлетворяют условию

$$x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \frac{63}{8}.$$

969. Один из корней уравнения $x^2 - x - a = 0$ равен $a + 1$. Найдите другой его корень.

970. При каком значении b уравнение

$$x^2 + b^2x + 3b^3 = 2b^2x - b + 12 + 2b^3$$

имеет корень $x = 3$?

971. Решите уравнение, считая, что k — данное число:
а) $x^2 + 2kx + (k - 1)^2 = 0$; б) $x^2 - kx + k - 1 = 0$.

972. Укажите условия, при выполнении которых квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — рациональные числа, имеет иррациональные корни.

973. При каких значениях a, b, c (или при каких отношениях между ними) для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$:
а) сумма корней этого трёхчлена равна их произведению;
б) корни этого трёхчлена равны по абсолютной величине?

974. Какими числами должны быть p и q, чтобы корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ были равны p и q?

975. *Задача Бхаскары II (1114 — ок. 1178).* Решите уравнение в целых числах:

$$100x + 90 = 63y.$$

976. Может ли биквадратное уравнение иметь один корень? два корня? три корня? В каждом случае, если ответ положителен, приведите примеры.

Решите уравнение **(977—990)**:

977. а) $|x| = 9$; б) $|x| = 1{,}5$; в) $|x - 1| = 2$;
г) $|x - 2| = 1$; д) $|x + 3| = 1$; е) $|x + 1| = 3$.

978. а) $|2x - 1| = 5$; б) $|3x + 2| = 4$;
в) $|7 - 3x| = 4$; г) $|-2 - 3x| = 5$.

979. а) $(x^2 + 2) \cdot |2x - 1| = 0$; б) $|x^4 + 1| = x^4 + x$;
в) $|x| = x + 2$; г) $|x| = 2x + 1$;
д) $|x - 3| = x$; е) $|x + 2| = 2x$.

980. а) $x(x + 1) = \left|x + \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$; б) $6x(x - 1) + 5\left|x - \frac{1}{2}\right| = -\frac{5}{2}$;
в) $x^2 + 5|x + 2| = -4(x + 2)$; г) $x^2 + 4x = 2 - |x + 2|$.

981. а) $4x^4 - 11x^2 - 3 = 0$; б) $4x^4 - 7x^2 - 2 = 0$.

982. а) $x - \frac{4x}{4 - x} = \frac{16}{x - 4}$; б) $\frac{3x}{3 - x} + \frac{9}{x - 3} = x$;
в) $\frac{1}{x^2 - 10x + 25} + \frac{10}{25 - x^2} = \frac{1}{x + 5}$;
г) $\frac{2}{x^2 + 12x + 36} - \frac{12}{36 - x^2} = \frac{1}{x - 6}$.

983. а) $\frac{2}{(2x - 1)(x + 2)} - \frac{x}{5(x + 2)} = \frac{2}{2x - 1}$;
б) $\frac{4}{(3x - 1)(x + 1)} - \frac{2x}{3x + 3} = \frac{3}{3x - 1}$.

984. а) $\frac{5 - 2x}{x^2 - x} + \frac{2}{x} = \frac{3x}{x - 1}$; б) $\frac{2x}{x + 1} + \frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{x - 1}$;
в) $\frac{6}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 4x} = \frac{7}{x^2 + x - 12}$.

985. а) $\frac{x + 3}{x^2 - x} - \frac{x + 5}{x + x^2} = \frac{x - 6}{1 - x^2}$; б) $\frac{5x}{3x + 1} - \frac{1}{9x + 3} = 1\frac{1}{6}$.

986. а) $\dfrac{1}{2x + x^2 + 1} + \dfrac{4}{x + 2x^2 + x^3} = \dfrac{5}{2x + 2x^2}$;

б) $\dfrac{7}{6x + 30} + \dfrac{3}{4x - 20} = \dfrac{15}{2x^2 - 50}$.

987. а) $\dfrac{2x^2 - 3x + x^3}{x^2 - 2x + 1} = 0$; б) $\dfrac{x(1 - x)}{1 + x} = 6$;

в) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 1} = \dfrac{2 + x}{x^2 - 1}$; г) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{5}{x - 1} = \dfrac{5 + x}{x^2 - 1}$.

988. а) $\dfrac{2}{x^2 - 10x + 25} - \dfrac{1}{x + 5} = \dfrac{10}{x^2 - 25}$;

б) $\dfrac{2}{x^2 + 12x + 36} - \dfrac{1}{x - 6} = \dfrac{12}{x^2 - 36}$.

989. а) $\dfrac{1}{x - 8} + \dfrac{1}{x - 6} + \dfrac{1}{x + 6} + \dfrac{1}{x + 8} = 0$;

б) $\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{4}{x - 1} = \dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{2}{x - 3}$.

990. а) $\dfrac{1}{x - x^{-1}} = 1$; б) $\dfrac{1}{x + x^{-1}} = 1$;

в) $\dfrac{2}{x^2 + 10x + 25} - \dfrac{10}{25 - x^2} = \dfrac{1}{x - 5}$;

г) $\dfrac{1}{x^2 - 12x + 36} + \dfrac{12}{36 - x^2} = \dfrac{1}{x + 6}$.

Подберите число x, удовлетворяющее равенству, если это возможно (991—995):

991. а) $\sqrt{x + 1} = 5$; б) $\sqrt{x + 3} = 1$; в) $\sqrt{2x - 1} = 3$; г) $\sqrt{3x - 2} = 4$.

992. а) $\sqrt[3]{x} = -1$; б) $\sqrt[4]{x} = 2$; в) $\sqrt[3]{x + 1} = 2$; г) $\sqrt[3]{2x} - 1 = 0$.

993. а) $x^2 - 3x + 2 = (1 - x)\sqrt{x}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1$.

994. а) $\sqrt{x} = -3$; б) $\sqrt{-x} = 3$; в) $\sqrt{2x + 1} = 2$; г) $\sqrt{1 - x} = 3$.

995. а) $x^{\frac{1}{3}} = 2$; б) $x^{\frac{2}{3}} = 3$; в) $x^{\frac{1}{5}} = -1$;

г) $x^{-\frac{1}{3}} = 2$; д) $x^{-\frac{2}{3}} = 1$; е) $x^{\frac{3}{5}} = -2$.

996. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x + 1} = \sqrt{4x + 1}$; б) $\sqrt{2x + 1} = 3x + 1$;

в) $\sqrt{\dfrac{x + 2}{2}} = x + 1$; г) $\sqrt{\dfrac{x + 1}{3}} = x - 1$;

д) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$; е) $x - 6\sqrt{x} - 7 = 0$.

Системы уравнений

Решите систему уравнений **(997—1008)**:

997. а) $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x - 6y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x - 10y = 3, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 4y = 6, \\ 7x + 6y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 3y = 15, \\ 10x - 6y = 0. \end{cases}$

998. а) $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + y^2 = 13. \end{cases}$

999. а) $\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$

1000. а) $\begin{cases} \dfrac{y-3}{x+2} = \dfrac{1}{3}, \\ xy + 3x + 4y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y-1} + \dfrac{y-1}{x} = 2, \\ 2x - 3y = 5. \end{cases}$

1001. а) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2. \end{cases}$

1002. а) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8(x - y), \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

1003. а) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2. \end{cases}$

1004. а) $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 447, \\ xy(x - y) = 210; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ x + y = \dfrac{5}{4}xy. \end{cases}$

1005. а) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = y^2, \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$

1006. а) $\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 3, \\ xz = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} yz = \dfrac{2}{3}x, \\ zx = \dfrac{3}{2}y, \\ xy = 6z. \end{cases}$

1007. а) $\begin{cases} (x - 5)(x + y) = -20, \\ (y - 8)(x + y) = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 3y - 6)y - 2x = 0, \\ (2x + y - 12)y - 2x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 10)(y - 12) = 0, \\ \dfrac{y^2 - 160}{y - 2x} = 0{,}2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy + 5(x - y) = 7, \\ x^2 + y^2 + 5(x - y) = 10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 44, \\ \dfrac{y}{2} - \dfrac{2}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y = xy, \\ xy = x^2 + y^2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 128, \\ 3x^2 - 3xy + 2y^2 = 128. \end{cases}$

1008. а) $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |y - 4| = x, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$

1009. При каком значении a сумма квадратов чисел, составляющих решение системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = a, \\ 2x - y = a + 1, \end{cases}$$

будет наименьшей?

Функции и графики

1010. Постройте график функции:

а) $y = x$; б) $y = -2x + 3$; в) $y = \dfrac{1}{3}x - 2$; г) $y = -2{,}5x - 1$.

1011. Найдите числа a и b, при которых прямые $x + y = -b$ и $x - ay - 2 = 0$:

а) пересекаются в точке (1; 1);
б) параллельны и не совпадают;
в) совпадают.

1012. Постройте график функции $y = 3x - 1$. Замените x на y, а y на x и постройте график полученной функции в той же системе координат.

1013. Постройте график функции $y = 3x^2 + 1$. Найдите с помощью графика:

а) $y(1)$; б) $y(-2)$;
в) x_0, такое, что $y(x_0) = 1$; г) x_0, такое, что $y(x_0) = 2$.

1014. Принадлежит ли точка (–0,2; 0,4) графику функции $y = x^2$?

Постройте график функции (**1015—1019**):

1015. а) $y = 3x - 4$; б) $y = -2x + 1$; в) $y = -3x - 2$;
г) $y = |x| - 3$; д) $y = |x - 3|$; е) $y = |x - 1| - 2$;
ж) $y = |x| + 1$; з) $y = |x + 2|$; и) $y = |x + 2| - 3$.

1016. а) $y = x^2 - 4$; б) $y = x^2 + 1$; в) $y = (x - 2)^2$;
г) $y = (x + 1)^2$; д) $y = -(x - 3)^2$; е) $y = -2(x + 3)^2$;
ж) $y = (x - 2)^2 + 4$; з) $y = -(x - 1)^2 + 1$;
и) $y = -2(x + 1)^2 - 4$.

1017. а) $y = \dfrac{1}{x-1}$; б) $y = \dfrac{1}{x+2}$; в) $y = \dfrac{1}{1-x}$;

г) $y = \dfrac{4}{4-x}$; д) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$; е) $y = \dfrac{1}{2-x} - 3$;

ж) $y = \dfrac{3}{x+2} - 1$; з) $y = \dfrac{2}{x-3} + 4$; и) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

к) $y = \dfrac{x-3}{x+4}$; л) $y = \dfrac{2x-1}{3x-1}$; м) $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$.

1018. а) $y = x^2 - 7x$; б) $y = 3 - x^2$;

в) $y = x^2 - 5x - 6$; г) $y = 3x^2 - x + 1$.

1019. а) $y = -|x|$; б) $y = |x - 1|$; в) $y = |2x + 1|$;

г) $y = x + |x|$; д) $y = x - |x|$; е) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$;

ж) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Отметьте штриховкой все точки координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию **(1020—1022)**:

1020. а) $x \geqslant 2$; б) $y \leqslant 3$; в) $x \geqslant 2$ и $y \leqslant 3$;

г) $x \geqslant 2$ или $y \leqslant 3$; д) $x \leqslant -1$ или $y \geqslant 1$;

е) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} |x| \geqslant 2, \\ |y| \geqslant 2; \end{cases}$

з) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; и) $x^2 + y^2 \geqslant 1$;

к) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ л) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$.

1021. а) $x < -3$; б) $y > -1$; в) $x < -3$ и $y > -1$;

г) $x < -3$ или $y > -1$; д) $x > -3$ или $y < -1$;

е) $\begin{cases} |x| < 3, \\ |y| < 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} |x| > 3, \\ |y| > 3; \end{cases}$

з) $x^2 + y^2 < 9$; и) $x^2 + y^2 > 4$;

к) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9, \\ x^2 + y^2 > 4; \end{cases}$ л) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 > 4$.

1022. а) $\begin{cases} y \geqslant -2x + 1, \\ y \geqslant x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant -x^2 + 4, \\ y \geqslant x + 2. \end{cases}$

1023. Изобразите все точки координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$$

или системе неравенств

$$\begin{cases} (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \geqslant 1, \\ |x| + |y| \leqslant 1. \end{cases}$$

1024. Найдите все значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $\frac{1}{x}$; б) x; в) $\frac{1}{x-1}$; г) $\frac{1}{x+12}$.

Найдите область определения функции (**1025—1027**):

1025. а) $y = \sqrt{x-7}$; б) $y = 2 + \sqrt{12-x}$;

в) $y = \sqrt{1-3x}$; г) $y = \frac{3}{\sqrt{2x+7}}$.

1026. а) $y = \sqrt{x+1}$; б) $y = \sqrt{3-2x}$;

в) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$; г) $y = \sqrt{3+4x} + \sqrt{7x-5}$.

1027. а) $y = \frac{1}{x-5}$; б) $y = \frac{x}{x+6} - \frac{3x}{3-7x}$;

в) $y = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{2x}$; г) $y = \frac{x-5}{3x-1} + \sqrt{5-x}$;

д) $y = \sqrt{2x-3}$; е) $y = \sqrt{3x+5}$;

ж) $y = \sqrt{x^2-1}$; з) $y = \sqrt{x^2+5}$.

1028. На рисунке 93 изображены парабола $y = ax^2 + bx + c$ и параллельные прямые m и l, пересекающие параболу в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и CD, параллельна оси Oy.

1029. На рисунке 94 изображены графики двух квадратичных функций, обозначенных $y_1(x)$ и $y_2(x)$. При каких x выполняется неравенство:

а) $y_1(x) \cdot y_2(x) > 0$; б) $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} < 0$?

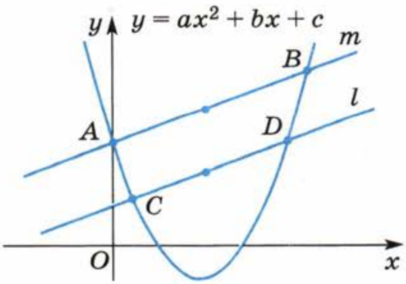


Рис. 93

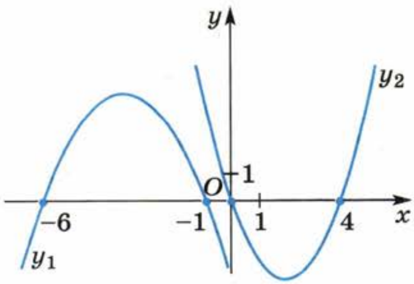


Рис. 94

1030. Постройте графики функций $y = x$ и $y = x^2$. Имеются ли точки, принадлежащие графикам этих функций, обладающие свойством симметричности относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?

1031. Существуют ли x, такие, что $x^3 = x$?

1032. Используя графики функций, определите число корней уравнения:

а) $x^3 = x^2$; б) $x^3 = x^4$; в) $x^4 = x^2 - 4$; г) $x^3 - 1 = x^2$.

Используя графики функций, решите неравенство (**1033—1034**):

1033. а) $\frac{1}{x} > 0$; б) $\frac{1}{x} < 0$; в) $-\frac{2}{x} > 0$; г) $-\frac{4}{x} < 0$;

д) $\frac{1}{x} > 1$; е) $\frac{1}{x} < 2$; ж) $\frac{2}{x} > 3$; з) $-\frac{2}{x} > 3$.

1034. а) $x^3 > x$; б) $x^2 < x^5$; в) $x^4 > x^2$;

г) $\frac{1}{x} > x^2 - 4$; д) $\frac{1}{x} < x$; е) $x > \frac{1}{x} - 3$.

1035. Постройте график функции:

а) $y = \frac{|x^3|}{x^2}$; б) $y = \frac{x^2}{|x^3|}$; в) $y = x^4 + 1$; г) $y = x^3 - 1$.

1036. Докажите, что функция $y = -x^3$ является убывающей.

1037. Постройте график функции $y = (x - 1)^3$.

1038. Найдите значение аргумента, при котором значения функций $y = |x|$ и $y = 2x - 1$ равны между собой.

1039. Покажите при помощи графика, что уравнение $x^2 - 2x + t = 0$:

а) при любом $t < 0$ имеет два действительных корня разных знаков, при этом абсолютная величина положительного корня больше абсолютной величины отрицательного корня;

б) при любом $0 < t < 1$ имеет два различных положительных корня;

в) при любом $t > 1$ не имеет действительных корней.

1040. Покажите с помощью графика, что уравнение $2x^2 + 3x + m = 0$:

а) при $m < 0$ имеет два действительных корня разных знаков, причём абсолютная величина отрицательного корня больше абсолютной величины положительного корня;

б) при $0 < m < 1\frac{1}{8}$ имеет два различных отрицательных корня;

в) при $m > 1\frac{1}{8}$ не имеет действительных корней.

1041. **Исследуем.** Для каких значений a уравнение:

а) $x^2 - x + a = 0$; б) $x^2 + x - a = 0$;

в) $x^2 - 4x + a = 0$; г) $x^2 + ax + 4 = 0$

имеет два корня, один корень, не имеет корней?

Решите графическим способом систему уравнений **(1042—1047)**:

1042. а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y = -1, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

1043. а) $\begin{cases} xy = -6, \\ y = -x^2 + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ xy = 4. \end{cases}$

1044. а) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = |x - 1|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6, \\ y = |x + 1|. \end{cases}$

1045. а) $\begin{cases} y = 2x^2 - 1, \\ y = -x^2 - 3x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 5x + 4, \\ y = -x^2 + 6. \end{cases}$

1046. а) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -x - 2, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 1 - x^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 2x^2 - 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2, \\ y = -\dfrac{8}{x}. \end{cases}$

1047. а) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = -8, \\ y = x + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5, \\ y = -\dfrac{12}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$

1048. Постройте график функции:

а) $y = -\dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$; б) $y = \dfrac{6(x - 3)}{x^2 - 3x}$.

При каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

1049. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, \text{ если } x \geqslant 2, \\ 3x, \text{ если } x < 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -\dfrac{3}{x}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 2 - x, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график в двух точках?

Неравенства

Доказываем. Докажите неравенство (**1050—1052**):

1050. а) $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$; б) $a + \frac{4}{a} \geqslant 4$ $(a > 0)$;

в) $a + \frac{9}{a} \leqslant 4$ $(a < 0)$; г) $4a + \frac{1}{a} \geqslant 4$ $(a > 0)$;

д) $9a + \frac{4}{a} \geqslant 12$ $(a > 0)$; е) $25a + \frac{16}{a} \geqslant 40$ $(a > 0)$.

1051. а) $m + \frac{9}{m} \geqslant 6$ $(m > 0)$; б) $x - 1 \leqslant \frac{x^2}{4}$; в)* $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \in N)$.

1052. а) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$;

б) $\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a > 0,\ b > 0)$;

в) $(a + b)^4 \geqslant 8a^4 + 8b^4$;

г) $(a + 2)(b + 2)(a + b) \geqslant 16ab$ $(a > 0,\ b > 0)$;

д) $ab(a + b) \leqslant a^3 + b^3$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$;

е) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$, если a, b и c — стороны некоторого треугольника.

1053. Сохранится ли знак неравенства, если обе части неравенства $9 > 6$:

а) увеличить на положительное число;
б) уменьшить на положительное число;
в) умножить на положительное число;
г) разделить на отрицательное число?

1054. а) Запишите неравенства, полученные умножением неравенства $4 > -2$ на: 3; -3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

б) Запишите неравенства, полученные делением неравенства $-3 < 7$ на: 2; -2; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

1055. а) Запишите неравенства, полученные прибавлением к обеим частям неравенства $-2 < 5$ числа 3; числа -8.

б) Запишите неравенства, полученные вычитанием из обеих частей неравенства $-7 < -3$ числа 1; числа -1.

1056. Верно ли неравенство:

а) $8 \geqslant 8$; б) $7 \geqslant 6$; в) $-1 \leqslant 2$; г) $-9 \geqslant -8$?

1057. а) Могут ли одновременно быть справедливыми неравенства $a > b$ и $a < b$?

б) Могут ли одновременно быть справедливыми неравенства $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$?

1058. а) Если $a > b$, то всегда ли верно неравенство $ac > bc$? Приведите примеры.

б) Если $a > b$, то верно ли неравенство $-a < -b$?

в) Известно, что $c < d$. Верно ли неравенство $c(a^2 + 1) < d(a^2 + 1)$, где a — любое действительное число?

1059. а) Докажите, что если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

б) Докажите, что если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

в) Если числа a и b таковы, что верно неравенство $a > b$, то всегда ли $a^2 > b^2$? Приведите примеры.

1060. а) Справедливо ли неравенство $a^2 + b^2 > a^2$ при любых действительных числах a и b?

б) Справедливо ли неравенство $a^2 + b^2 \geqslant b^2$ при любых действительных числах a и b?

1061. а) Может ли неравенство $a^2x > a$ (a — любое данное действительное число) не иметь решений?

Доказываем. Докажите неравенство (a, b, c — действительные числа) **(1062—1064)**:

1062. а) $\dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b}$ $(a \geqslant b,\ ab > 0)$; б) $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ $(a > b,\ ab < 0)$.

1063. $(a + b + c)^2 \geqslant a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c)$.

1064. а) $a^2 + b^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ a + b = 1)$;

б) $a^2 + 1 > \dfrac{2a}{a^2 + 1}$.

Доказываем (1065—1066).

1065. Докажите, что если положительные числа A, B, C, K удовлетворяют неравенствам $A < B$ и $C > K$, то они удовлетворяют и неравенству $\dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{K}$.

1066. Докажите, что если:

а) $a > 0$ и $a = b$, то $a^k = b^k$ при любом натуральном k;

б) $a > b > 0$, то $a^k > b^k$ при любом натуральном k.

Сформулируйте и докажите утверждения, обратные утверждениям «а» и «б».

1067. а) Автомобилист ехал некоторое время со скоростью a км/ч, потом точно такое же время со скоростью b км/ч. Выразите через a и b среднюю скорость движения на всём пути (обозначьте её v_1).

б) Автомобилист проехал некоторое расстояние со скоростью a км/ч, потом точно такое же расстояние со скоростью b км/ч. Выразите через a и b среднюю скорость движения на всём пути (обозначьте её v_2).

в) Сравните v_1 и v_2 (см. предыдущие задания).

г) Для положительных чисел a и b различают: среднее арифметическое чисел a и b — число $A = \frac{a+b}{2}$; среднее геометрическое чисел a и b — число $G = \sqrt{ab}$; среднее гармоническое чисел a и b — число H, такое, что $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$, откуда $H = \frac{2ab}{a+b}$. Докажите, что для чисел G, H и A справедливо неравенство $H \leqslant G \leqslant A$.

1068. В какую погоду самолёт, летящий из Москвы в Санкт-Петербург и обратно, выполнит быстрее рейс: в безветренную или при ветре, дующем с постоянной скоростью от Москвы в направлении Санкт-Петербурга?

1069. **Доказываем.** Докажите, что сумма квадратов двух различных положительных чисел больше удвоенного произведения этих чисел.

1070. Какое наименьшее значение может принять выражение $a^2 + b^2$, если $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$?

1071. Если система двух линейных неравенств не имеет решений, то следует ли из этого, что каждое неравенство системы не выполняется ни при каких значениях неизвестного?

1072. Одна сторона треугольника равна 6 м, а сумма двух других 14 м. Определите возможные длины сторон треугольника, если они выражаются натуральными числами.

Доказываем (1073—1074).

1073. Докажите, что полупериметр треугольника больше каждой из сторон этого треугольника.

1074. Докажите, что если $|x| < a$, то $-a < x < a$.

1075. Запишите неравенство в виде двойного неравенства:
а) $|x - 0{,}5| < 3$; б) $|x - 3| < 1$; в) $|x + 2| < 5$.

1076. Укажите на координатной оси все решения неравенства:
а) $|x - 0{,}5| < 3$; б) $|x + 2{,}5| < 1$; в) $|2x - 1| < 2$.

1077. Решите неравенство:
а) $|x - 1| < 1$; б) $|x + 1| < 2$; в) $|2x + 1| < 4$; г) $|3x - 2| < 5$.
Например: $|2x - 1| < 3$.
$-3 < 2x - 1 < 3$, $-2 < 2x < 4$, так как $2 > 0$, то $-1 < x < 2$.
Ответ: $(-1; 2)$.

1078. Решите неравенство:
а) $|x - 1| > 1$; б) $|x + 1| > 2$;
в) $|1 + 2x| \geqslant 3$; г) $|7x - 3| > 1$.

1079. При каких значениях x значения функции $y = 5x - 3$:
а) больше 1; б) меньше 5; в) не меньше -2; г) не больше -5?

1080. Найдите значение x, для которого соответствующее значение функции y является наименьшим, если:
а) $y = (x + 1)^2 - 3$; б) $y = (x - 2)^2 + 5$.

1081. Среди положительных чисел найдите число x, при котором значение функции y является наименьшим, если:
а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = 9x + \frac{1}{x}$; в) $y = x + \frac{1}{4x}$; г) $y = 4x + \frac{1}{25x}$.

1082. Решите неравенство, считая, что a — данное число:
а) $ax > 0$; б) $ax > 1$; в) $ax + 1 > 3$;
г) $ax - 8 < 11$; д) $ax > x$; е) $ax + 1 > x$.

Решите неравенство (**1083—1086**):

1083. а) $x^2 - 4x > 0$; б) $x^2 + 3x \leqslant 0$; в) $3x^2 - x < 0$;
г) $4x^2 + x \geqslant 0$; д) $x^2 - 9 < 0$; е) $x^2 - 4 \geqslant 0$.

1084. а) $x^2 - 5x + 4 > 0$; б) $x^2 + 6x - 7 < 0$;
в) $x^2 + 5x + 4 \geqslant 0$; г) $x^2 - 6x - 7 \leqslant 0$;
д) $3x^2 - 2x - 5 > 0$; е) $2x^2 + 3x + 1 < 0$.

1085. а) $x^2 + 2x + 1 > 0$; б) $x^2 - 6x + 9 < 0$;
в) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$; г) $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0$;
д) $-x^2 + 10x - 25 > 0$; е) $-x^2 + 8x - 16 < 0$.

1086. а) $x^2 + 2x + 2 > 0$; б) $x^2 - 2x + 2 < 0$;
в) $x^2 - 6x + 10 \geqslant 0$; г) $x^2 + 6x + 10 \leqslant 0$.

1087. Напишите неравенство второй степени с одним неизвестным, множество решений которого изображено на рисунке 95.

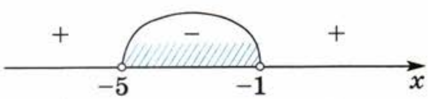


Рис. 95

1088. При каких значениях b неравенство не имеет решений:
а) $3x^2 - bx - 1 < 0$; б) $x^2 + bx + 4 < 0$?

1089. При каких значениях m неравенство не имеет решений:
а) $x^2 - 4x + m < 0$; б) $x^2 + 2x + m < 0$;
в) $x^2 - mx + 4 < 0$; г) $x^2 + mx + 9 < 0$?

Решите неравенство (**1090—1096**):

1090. а) $(2x - 3)^2 \geqslant (5x + 9)^2$; б) $(4x + 3)^2 \leqslant (9x - 7)^2$;
в) $(x - 3)(x - 2)^2 \geqslant 0$; г) $(x - 5)(x + 1)^2 \geqslant 0$;
д) $25x^4 \geqslant 16x^2$; е) $4x^4 \geqslant 9x^2$.

1091. а) $(1 + x)^2 < |1 - x^2|$; б) $|1 - x^2| < (1 - x)^2$.

1092. а) $\dfrac{5x + 2}{3x^2 + 1} < \dfrac{x + 6}{3x^2 + 1}$; б) $\dfrac{3x - 5}{6x^2 + 7} > \dfrac{x - 1}{6x^2 + 7}$;

в) $\dfrac{x^2 + 1}{2x - 3} > \dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$; г) $\dfrac{x^2 + 4}{3x - 5} < \dfrac{x^2 + 4}{5x - 3}$;

д) $\dfrac{x^2}{x - 1} \geqslant \dfrac{4}{x - 1}$; е) $\dfrac{x^2}{x + 2} \leqslant \dfrac{9}{x + 2}$.

1093. а) $\dfrac{4}{1 - x} + \dfrac{1}{(1 - x)^2} > 12$; б) $\dfrac{3}{3 - x} + \dfrac{1}{(3 - x)^2} > 18$;

в) $\dfrac{4}{4 - x} + \dfrac{1}{(4 - x)^2} \leqslant 5$; г) $\dfrac{3}{3 - x} + \dfrac{1}{(3 - x)^2} \leqslant 10$.

1094. а) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 5} > 0$; б) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 3} < 0$;

в) $\dfrac{3 - x - 2x^2}{x^2 - 36} > 0$; г) $\dfrac{1{,}8}{x^3 - x^2 + x - 1} < 0$.

1095. а) $\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{2}{x + 1} < \dfrac{8}{x^2 - 1}$; б) $\dfrac{4}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} > \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

1096. а) $1 < \dfrac{3x - 1}{2x + 1} < 2$; б) $1 < \dfrac{2x - 1}{3x + 1} < 2$.

Последовательности

1097. а) Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 3, ни на 5?
б) Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 6, ни на 8?

1098. Укажите наименьший член последовательности $\{x_n\}$, заданной формулой общего члена:
а) $x_n = n^2 - 6n + 5$; б) $x_n = n^2 - 18n + 1$;
в) $x_n = 3n^2 - 16n - 1$; г) $x_n = 7n^2 - 50n$.

1099. *Из «Курса чистой математики» Е. Д. Войтяховского.* Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 к., за вторую 2 к., за третью 4 к. и т. д. Всего воин получил 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран.

1100. Группа туристов вышла из города A в направлении города B, удалённого от города A на a км. В первый день группа прошла 40 км, а в каждый последующий день она проходила на 1 км больше, чем в предыдущий. Через t дней из города B в том же направлении вышла вторая группа туристов, которая в первый день прошла 30 км, а в каждый следующий день проходила на 2 км больше, чем в предыдущий. Через сколько дней после своего выхода первая группа догонит вторую, если:

а) $a = 100$, $t = 1$; б) $a = 114$, $t = 2$;
в) $a = 91$, $t = 1$; г) $a = 131$, $t = 2$?

1101. Вычислите:

а) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 17 + 18 + 19$;
б) $30 + 31 + 32 + \ldots + 47 + 48 + 49 + 50$.

1102. Для любого натурального n вычислите сумму
$$3 + 8 + 13 + \ldots + (5n - 2).$$

1103. а) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый её член равен 19, а девятый член равен 35.
б) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что четвёртый её член равен -13, а десятый член равен -43.
в) Разность арифметической прогрессии равна 9,5, а двенадцатый член равен 105,25. Найдите первый член прогрессии.
г) Числа $\frac{1}{2}$ и $-1\frac{7}{8}$ — первый и двадцатый члены арифметической прогрессии. Найдите разность этой прогрессии.

1104. а) Между числами 7 и 35 на координатной прямой найдите шесть точек, координаты которых вместе с числами 7 и 35 являются последовательными членами арифметической прогрессии.
б) Между числами 1 и 6 найдите пять чисел, которые вместе с заданными числами являются последовательными членами арифметической прогрессии.

1105. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, второй член которой равен 0,5, а четырнадцатый равен $-33,5$.

1106. Найдите сумму первых пятидесяти пяти членов арифметической прогрессии, последний член которой равен 5,8, а сумма двух последних равна 11,5.

1107. Найдите разность арифметической прогрессии, четвёртый член которой равен 1,25, а девятый равен $\frac{5}{6}$.

1108. Сумма членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из тридцати членов, равна 3645. Первый член этой прогрессии равен 20. Найдите второй член прогрессии.

1109. Сумма всех членов конечной арифметической прогрессии равна 28, третий член равен 8, а четвёртый равен 5. Найдите число членов прогрессии и её крайние члены.

1110. а) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 2 или 3.
б) Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не кратных 7.

1111. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 2.

1112. Сумма первых 40 членов арифметической прогрессии равна 340, а сумма первых 39 её членов равна 325. Найдите разность прогрессии.

1113. Даны две арифметические прогрессии: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Является ли арифметической прогрессией последовательность:
а) $a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n,\ \ldots$;
б) $a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots,\ a_n - b_n,\ \ldots$;
в) $a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2,\ \ldots,\ a_n \cdot b_n,\ \ldots$;
г) $|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|,\ \ldots$;
д) $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots$ (все $b_i \neq 0$)?

Доказываем (1114—1115).

1114. Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа a^2, b^2, c^2 также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

1115. Числа a, b, c и числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ являются последовательными членами арифметических прогрессий. Докажите, что $a = b = c$.

1116. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если известно, что:
а) $a_2 + a_4 = 16,\ a_1 \cdot a_5 = 28$; б) $a_1 \cdot a_{11} = 44,\ a_2 + a_{10} = 24$.

1117. Найдите сумму всех двузначных чисел, не кратных ни 2, ни 3.

1118. Запишите первые 11 членов геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен 1,5, а шестой член равен 2.

1119. Определите первый член геометрической прогрессии, если её знаменатель равен 4, а восьмой член равен 256.

1120. Первый член геометрической прогрессии равен 2058, а четвёртый член равен 6. Найдите знаменатель этой прогрессии.

1121. Между числами 1 и 14 641 найдите три числа, которые вместе с заданными числами являются последовательными членами геометрической прогрессии.

1122. Крайние члены конечной геометрической прогрессии равны 15 и 240. Знаменатель этой прогрессии равен 0,5. Сколько членов в этой прогрессии?

1123. Найдите сумму членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 3, а крайние члены равны 20 и 131 220.

1124. Первый член конечной геометрической прогрессии равен 7, знаменатель равен 4. Найдите последний член прогрессии, если сумма всех её членов равна 9555.

1125. Найдите последний член конечной геометрической прогрессии, если известно, что сумма первых двух членов равна 4, разность этих же членов равна 2, число членов прогрессии равно 8.

1126. Знаменатель конечной геометрической прогрессии, состоящей из семи членов, равен 2, сумма всех членов равна 635. Найдите последний член прогрессии.

1127. Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, равен 768, последний член прогрессии меньше четвёртого в 16 раз. Найдите сумму всех членов прогрессии.

1128. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\frac{3}{4}$, последние два члена равны соответственно 750 и 7500. Найдите число членов прогрессии.

1129. Первый член конечной геометрической прогрессии равен 1, последний равен 64, сумма всех членов равна 127. Найдите число членов прогрессии.

1130. Двенадцатый член геометрической прогрессии равен 1536, четвёртый член равен 6. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

1131. В геометрической прогрессии седьмой член равен 27, десятый член равен 729. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии.

1132. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма первых двух членов равна 16, а сумма пятого и шестого членов равна 1296.

1133. Запишите первые восемь членов геометрической прогрессии, в которой произведение первых двух членов равно $\frac{1}{3}$, а произведение первого и пятого членов равно $\frac{1}{64}$.

1134. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 28, сумма следующих трёх членов равна 3,5. Найдите восьмой член прогрессии.

1135. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если известно, что первый член равен 9, а сумма первых трёх членов равна 58,59.

1136. а) Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если порядок её членов изменить на противоположный?
б) Сколько членов в конечной арифметической прогрессии, если её крайние члены 10 и 7,5, а разность равна –0,4?

1137. Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если известно, что:
а) $a_1 = 5,\ a_2 = -5$; б) $a_1 = -3,\ a_2 = 0$;
в) $a_1 = 6,\ a_{10} = 33$; г) $a_4 = -4,\ a_{17} = -17$.

1138. Даны две геометрические прогрессии: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:
а) $a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \dots,\ a_n + b_n,\ \dots$;
б) $a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \dots,\ a_n - b_n,\ \dots$;
в) $a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2,\ \dots,\ a_n \cdot b_n,\ \dots$;
г) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$ (все $b_i \neq 0$)?

1139. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, если известно, что:
а) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16},\ b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$; б) $b_2 - b_1 = 2,\ b_3 - b_1 = 8$.

1140. Найдите четыре числа b_1, b_2, b_3, b_4, если известно, что числа b_2, b_3, b_4 образуют конечную геометрическую прогрессию, а числа b_1, b_2, b_3 образуют конечную арифметическую прогрессию и $b_1 + b_4 = 37,\ b_2 + b_3 = 36$.

1141. Найдите три числа b_1, b_2, b_3, образующие конечную арифметическую прогрессию, если известно, что их сумма равна 30, а числа $b_1 - 5,\ b_2 - 4,\ b_3$ образуют конечную геометрическую прогрессию.

1142. Найдите n — число членов конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots, b_n$, если известно, что $b_1 + b_5 = 51,\ b_2 + b_6 = 102,\ S_n = 3069$.

1143. Найдите все числа x, удовлетворяющие следующему условию: $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.

1144. Сумма трёх чисел, образующих конечную арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

1145. а) Сумма второго и девятого членов арифметической прогрессии равна 10. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.
б) Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 16. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

1146. В конечной геометрической прогрессии чётное число членов. Найдите её знаменатель, если:
а) сумма всех членов прогрессии в 4 раза больше суммы её членов, стоящих на нечётных местах;
б) сумма всех членов прогрессии, стоящих на чётных местах, в 2 раза больше суммы её членов, стоящих на нечётных местах.

Тригонометрия

1147. При завинчивании шестигранной гайки гаечный ключ повернули на «две грани». Выразите в градусах величину угла, на который повернули гаечный ключ, если учесть, что угол поворота отрицательный.

1148. Определите в градусах величину угла, описываемого минутной стрелкой часов за:
а) 5 мин; б) 15 мин; в) 45 мин;
г) 1 ч; д) 3 ч 20 мин; е) полсуток.

1149. На какой угол надо повернуть минутную стрелку часов, чтобы перевести часы:
а) вперёд на 10 мин; б) назад на 1 ч 12 мин?

1150. При регулировке карбюратора автомашины винт холостого хода повернули против часовой стрелки на 1,75 полного оборота. Выразите угол поворота в градусах.

1151. Ведро в колодце поднимается на 2 м, если рукоятку ворота повернуть на 5 полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол (в градусах) надо повернуть рукоятку, чтобы ведро:
а) поднялось на 1,5 м; б) опустилось на 3 м?

1152. Окружность морского компаса разделена на 32 равные части, называемые **румбами**. Выразите в градусах углы 1, 2, 10, 15 румбов.

1153. В 1799 г. Парижская академия наук ввела метрическую единицу измерения углов, которая называлась **град**. 1 град равен 0,01 части прямого угла. Выразите в градах углы $90°$, $120°$, $150°$.

1154. В астрономии используется единица измерения долготы места, называемая **часом**. Час долготы равен $\frac{1}{24}$ части полного оборота (360°), на который Земля поворачивается за сутки. 1 час содержит 60 минут, а 1 минута содержит 60 секунд. Выразите час, минуту, секунду долготы в градусах, минутах и секундах.

1155. Углы треугольника относятся между собой как $3 : 4 : 5$. Определите радианные меры этих углов с точностью до 0,01.

1156. В равнобедренном треугольнике угол при вершине в 2 раза меньше угла при основании. Определите радианные меры этих углов с точностью до 0,01.

1157. Шкив электромотора делает 2000 оборотов в минуту. Определите угловую скорость вращения шкива (в радианах в секунду).

1158. Какую линейную скорость имеет точка, удалённая от оси вращения на 2 см, если угловая скорость вращения равна $\frac{\pi}{2}$ радиана в секунду?

1159. Запишите все углы, которым соответствуют точки пересечения единичной окружности:
а) с осями координат;
б) с биссектрисами координатных углов.

1160. Как расположены на единичной окружности точки, соответствующие углам:
а) α и $-\alpha$; б) α и $\alpha + \pi$;
в) $\alpha + \pi$ и $\alpha - \pi$; г) $\alpha + 2\pi k$ и α;
д) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\frac{\pi}{2} + \alpha$; е) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} + \alpha$,
где k — некоторое целое число?

1161. Вычислите:
а) $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 1,5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}$;

б) $2\sin 45° + 2\cos 45° - 3\operatorname{tg} 45° - 10\operatorname{ctg} 45° + \frac{2}{\sin 45°} - \frac{4}{\cos 45°}$;

в) $\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 1,5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}$;

г) $\sin\frac{\pi}{2} - 6\cos\frac{\pi}{2} + 3\operatorname{tg} 0 + \frac{5}{\cos 0}$;

д) $2\sin 180^\circ - 3\cos 180^\circ + 4\,\mathrm{tg}\,180^\circ + \dfrac{2}{\cos 180^\circ}$;

е) $3\sin\dfrac{3\pi}{2} - 4\cos\dfrac{3\pi}{2} + 5\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{2}}$;

ж) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{4} - \sin^2\dfrac{\pi}{2}\cos^4\dfrac{3\pi}{2}}$;   з) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos(-30^\circ)} + \dfrac{1}{\sin(-30^\circ)}}{\sin^2(-60^\circ) + \dfrac{1}{\sin(-30^\circ)}}$.

1162. Найдите все значения угла β $(0 < \beta < 2\pi)$, при каждом из которых справедливо неравенство:
а) $\sin\beta\cos\beta > 0$;   б) $\sin\beta\cos\beta < 0$.

1163. а) Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
б) Найдите $\cos\beta$, $\sin\beta$ и $\mathrm{tg}\,\beta$, если $\mathrm{ctg}\,\beta = 2$ и $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

1164. Определите знак числа:
а) $\dfrac{\cos 10\sin 7 - \mathrm{tg}\,10}{\cos(-\sqrt{2})\,\mathrm{ctg}(-4)}$;   б) $\dfrac{\sin(-3)\cos 4\,\mathrm{tg}(-5)}{\mathrm{ctg}\,6}$;
в) $\dfrac{(\sin 3\cos 4 - \sin 4\cos 3)(\sin 3\cos 4 + \sin 4\cos 3)}{(\cos 3\cos 4 - \sin 3\sin 4)(\cos 3\cos 4 + \sin 3\sin 4)}$.

1165. Вычислите:
а) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\mathrm{tg}(-\pi) - \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - 10\pi\right)\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3} + 10\pi\right)}$;
б) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{3\pi}{4}}$.

1166. **Доказываем.** Докажите справедливость равенства:
а) $\mathrm{ctg}(\alpha + 3\pi)\sin(2\pi - \alpha) - \cos(\alpha - \pi) - \sin(\alpha - \pi) = \sin\alpha$ при $\alpha \ne \pi k$, где k — любое целое число;
б) $3\,\mathrm{tg}(\alpha - 5\pi)\cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha - \pi) + 2\sin(\pi - \alpha) = 0$ при $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

1167. Упростите выражение:
а) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;
б) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

1168. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

1169. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = 0{,}8$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

1170. Вычислите:

а) $\cos 37°30' \cos 7°30'$;
б) $\sin 75° \sin 15°$;
в) $\cos 15° \cos 75°$;
г) $\sin\frac{5\pi}{24} \sin\frac{\pi}{24}$;
д) $\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°$;
е) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$;
ж) $\frac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 17°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 17°}$;
з) $\frac{\operatorname{tg} 1° - \operatorname{tg} 46°}{1 + \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 46°}$;
и) $\frac{\operatorname{tg} 113° + \operatorname{tg} 7°}{1 - \operatorname{tg} 113° \operatorname{tg} 7°}$;
к) $\frac{\operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 15°}{1 + \operatorname{tg} 150° \operatorname{tg} 15°}$.

Доказываем (1171—1173).

1171. Докажите справедливость равенства:

а) $\sin 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{1}{8}$;
б) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$;
в) $\sin\frac{\pi}{5} \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;
г) $\sin 18° \cos 36° = \frac{1}{4}$.

1172. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то справедливы равенства и неравенство:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;
б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$;
в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$, где $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$.

1173. Докажите справедливость равенства:

а) $\cos 2\alpha(\sin\alpha + \sin 3\alpha) = \sin 2\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha)$;
б) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$.

1174. Найдите все углы α, для каждого из которых одновременно имеют смысл обе части равенства:

а) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
б) $\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + 2)(2\operatorname{tg}\alpha + 1) = 5\sin\alpha\cos\alpha + 2$.

Для найденных углов α докажите справедливость равенства.

Текстовые задачи

1175. а) В нашем классе 32 человека. 23 человека любят кошек, 18 человек — собак. Причём 10 человек любят и кошек, и собак. Сколько человек нашего класса не любят ни кошек, ни собак?

б) В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино и музей — 6 человек, а 2 человека не ходили ни в кино, ни в музей. Сколько человек нашего класса ходили в кино?

1176. В нашем классе 20 учащихся любят либо физику, либо математику, либо оба эти предмета. Среди любителей физики 50% любят математику, а среди любителей математики 25% любят физику. Сколько учащихся нашего класса любят и физику, и математику?

1177. Имеется 7 телефонов, и каждый из них должен быть соединён только с тремя другими. Можно ли это сделать?

1178. В чемпионате области по футболу участвует 30 команд. Сколько игр необходимо сыграть, чтобы каждая команда встретилась с каждой по одному разу?

1179. Два каменщика выкладывают стену за 3 дня. За сколько дней выполнят эту работу три каменщика, если производительность труда у всех рабочих одинаковая?

1180. Диаметр шкива электромотора, делающего 1200 оборотов в минуту, равен 180 мм. Как надо изменить диаметр шкива, чтобы при уменьшении числа оборотов до 1080 в минуту скорость движения приводного ремня не изменилась?

1181. Два шкива соединены ременной передачей. Выразите формулой зависимость между длинами их окружностей C_1 и C_2 и числом оборотов n_1 и n_2, которые делают шкивы в единицу времени. Выразите каждую из четырёх величин через остальные три.

1182. *Из «Арифметики Л. Ф. Магницкого».* Верёвкой длиною 5 аршин связали 100 копий. Спрашивается, сколько таких же копий можно связать другой верёвкой длиною $7\frac{1}{2}$ аршина (предполагается, что пучки копий обвязывают верёвкой по окружности).

1183. Могут ли три человека преодолеть расстояние 36 км не более чем за 6 ч, если скорость пешехода равна 5 км/ч, но у них имеется велосипед (рассчитанный только на одного человека), на котором можно передвигаться со скоростью 15 км/ч? Если могут, то покажите как; если нет, то объясните почему.

1184. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 2 : 1. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить третий сплав, содержащий 50% каждого металла?

1185. Трое рабочих выполняют одинаковую работу: первый за 12 ч, второй за 15 ч, третий за 20 ч. Сколько часов затратят рабочие на выполнение этой работы?

1186. *Задача П. Л. Чебышёва.* Мальчик сказал: «Если мне дадут ещё 40 орехов, то у меня будет столько же, сколько у моего брата. А если мне дадут 90 орехов, то у меня станет в 2 раза больше, чем у моего брата». Сколько орехов у каждого?

1187. *Старинная задача (Китай, I в.).* Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесёт по 8 (денежных единиц), то избыток равен 3. Если каждый человек внесёт по 7, то недостаток равен 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

1188. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некто желает дать милостыню убогим, дав каждому из них по 3 пенязи[1], но недостаёт денег на 3 человека. Если бы дал им по 2 пенязи, тогда бы осталось денег на 4 человека. Спрашивается, сколько было убогих и сколько у того мужа было денег.

1189. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесёт по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый человек внесёт по 6, то не хватит 16. Найти количество людей и стоимость курицы.

1190. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190 (денежных единиц), то недостаток равен 330. Если же каждые девять семей внесут по 270, то избыток равен 30. Сколько семей и сколько стоит буйвол?

1191. *Старинная задача.* Идёт корабль по морю, на нём мужеска полу и женска 120 человек. Всего заплатили 120 гривен[2], мужчины дали по 4 алтына, а женщины дали по 3 алтына с человека. Сколько мужеска полу и женска порознь?

1192. Участникам школьной математической викторины было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ засчитывалось 7 очков, а за неправильный списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал участник викторины, если он набрал 77 очков?

1193. Сумма трёх чисел равна 254,772. Если в одном из чисел перенести запятую на две цифры вправо, то получится большее из чисел, а если перенести запятую в том же числе на одну цифру влево, то получится меньшее число. Найдите эти числа.

---

[1] Пенязь — деньга, деньги.

[2] 1 гривна (гривенник) = 10 к., 1 алтын = 3 к.

1194. Сумма трёх чисел равна 3898,32. Если в одном из чисел перенести запятую на одну цифру вправо, то получится большее число, а если в этом же числе перенести запятую на одну цифру влево, то получится меньшее из чисел. Найдите эти числа.

1195. На термометре Цельсия температуры таяния льда и кипения воды обозначаются соответственно $0°$ и $100°$. На термометре Фаренгейта эти температуры обозначены соответственно $-32°$ и $212°$. При какой температуре оба термометра будут показывать одинаковое число градусов?

1196. а) Обнаружив в 64 м от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал её преследовать. Сократив расстояние до черепахи в 8 раз и осознав своё превосходство, он прекратил погоню. Какой путь проделал Ахиллес с начала погони, если его скорость в 15 раз больше скорости черепахи, причём движение Ахиллеса и черепахи происходило по прямой?

б) До приближающегося Ахиллеса оставалось ещё 6 м, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погони, и она обречённо остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если её скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время погони сократилось в 9 раз и их движение происходило по прямой?

1197. а) Если длину прямоугольника уменьшить на 1 м, а его ширину увеличить на 1 м, то площадь прямоугольника увеличится на 5 м^2. На сколько метров длина прямоугольника больше его ширины?

б) Если бы папа был на 2 года моложе, а мама на 2 года старше, то произведение их возрастов было бы на 6 больше, чем сейчас. На сколько лет папа старше мамы?

1198. Под посев пшеницы отведено 3 участка пашни, общая площадь которых в 3 раза больше площади второго участка. За день были засеяны половина первого, $\frac{2}{3}$ второго и весь третий участок. Площадь, оставшаяся незасеянной, в 2 раза меньше площади третьего участка. Какую часть отведённой под посев площади составляет площадь, засеянная за день?

1199. Велосипедист проехал расстояние от пункта A до пункта B и обратно с постоянной скоростью. Мотоциклист проехал расстояние AB со скоростью в n раз большей, чем скорость велосипедиста. Он оставил мотоцикл в пункте B и вернулся в пункт A пешком со скоростью в n раз меньшей, чем скорость велосипедиста. Кто из них был дольше в пути и во сколько раз, если:

а) $n = 2$; б) $n = 5$?

1200. Латунь состоит из меди и цинка. Кусок латуни весом 124 г, погружённый в воду, теряет в весе 15 г, а кусок меди весом 89 г, погружённый в воду, теряет в весе 10 г. Кроме того, известно, что кусок цинка, погружённый в воду, теряет $\frac{1}{7}$ веса. Определите, сколько меди и сколько цинка содержится в 124 г латуни.

1201. Нарисовали ромбы и прямоугольники. Ромбов в 2 раза больше, чем прямоугольников. Число ромбов, не являющихся прямоугольниками, в 3 раза больше числа прямоугольников, не являющихся ромбами.

а) Определите наименьшее возможное число фигур.

б) Во сколько раз квадратов было меньше, чем ромбов?

в) Сколько квадратов нарисовали, если всего нарисовали 20 фигур?

1202. Грузовая машина выехала из пункта A в пункт B. Спустя 2 ч из пункта B в пункт A выехала легковая машина, которая прибыла в пункт A на час позже, чем грузовая машина в пункт B. Сколько часов была в пути грузовая машина, если к моменту встречи она проехала $\frac{2}{3}$ всего пути?

1203. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. В середине пути между пунктами A и B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту осталось проехать ещё треть пути. Какое время затратил на путь от пункта A до пункта B велосипедист и какое — автомобиль, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны?

1204. *Задача Л. Н. Толстого.* На 100 р. купили 100 скотин — телят по полтине, коров по 3 р., быков по 10 р. Сколько купили телят, коров и быков в отдельности?

1205. Сплав золота и серебра весом 13 кг 410 г при погружении в воду стал весить 12 кг 510 г. Определите количество золота и количество серебра в сплаве, если известно, что плотность золота равна 19,3 г/см^3, а серебра равна 10,5 г/см^3.

1206. По окружности длиной 100 м движутся две точки. При движении в одном и том же направлении они встречаются каждые 20 с, а при движении в противоположных направлениях они встречаются каждые 4 с. Определите скорость каждой точки.

1207. Два куска одинаковой ткани сто́ят вместе 91 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго — половину того, что было первоначально в первом, то остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стóит 1,4 р.?

1208. *Старинная задача.* Для молотьбы хлеба были наняты несколько рабочих. Если бы их было тремя меньше, то они проработали бы двумя днями дольше. Если бы наняли четырьмя рабочими больше, то работа была бы окончена двумя днями раньше. Сколько было рабочих и сколько дней они проработали?

1209. Найдите такие четыре числа, чтобы суммы, образованные тремя из них, были соответственно равны 20, 22, 24, 27.

1210. Суммы сторон четырёхугольника, взятых последовательно по 3, равны 130, 135, 147, 152 см. Определите длину каждой стороны четырёхугольника.

1211. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и вторая бригады вместе могут вспахать это поле за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Какая бригада — вторая или третья — может вспахать больше за день и во сколько раз?

1212. Среди абитуриентов, выдержавших приёмные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике — 96 абитуриентов, по физике — 74, по русскому языку — 84, по математике или физике — 150, по математике или русскому языку — 152, по физике или русскому языку — 132, по всем трём предметам — 8. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятёрку? Сколько среди них получивших одну пятёрку?

1213. На заводе сначала работали 2 цеха — первый и второй. Затем был пущен третий цех, в результате чего завод увеличил ежемесячный выпуск продукции в 1,6 раза. Во сколько раз больше продукции даёт в месяц третий цех, чем второй, если известно, что за 2 месяца первый и третий цеха вместе выпускают столько продукции, сколько второй за полгода?

1214. Для производства одного электродвигателя типа A используется 2 кг сплава, содержащего 20% свинца и 80% меди. Для производства одного электродвигателя типа B используется 2 кг сплава, содержащего 60% свинца и 40% меди. Прибыль от производства одного электродвигателя типа A или типа B составляет соответственно 8 р. или 12 р. Сколько нужно изготовить электродвигателей каждого типа, чтобы получить 1000 р. прибыли, израсходовав при этом не более 84 кг свинца и не более 111 кг меди?

1215. Найдите два числа, если они находятся в отношении 3 : 2 и их:
а) сумма равна 20; б) разность равна 20;
в) произведение равно 150.

1216. Периметр прямоугольника равен 16 дм, а его площадь равна 15 дм^2. Определите стороны этого прямоугольника.

1217. Квадрат меньшего из двух натуральных чисел равен их сумме, а разность этих чисел равна 15. Найдите эти числа.

1218. *Задача Бега-Эддина (Иран, XVI в.).* Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

1219. *Задача аль-Каши (Самарканд, ум. ок. 1436—1437 гг.).* Копьё стояло в воде отвесно и высовывалось наружу на 3 локтя. Ветер отклонил его и погрузил в воду таким образом, что его вершина стала находиться на поверхности воды, а основание не изменило своего положения. Расстояние между первоначальным местом его появления и местом его исчезновения в воде — 5 локтей. Мы хотим узнать длину копья.

1220. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя осталось дома. Одна пчёлка полетела за трутнем, обеспокоенная его жужжанием в цветке лотоса, куда он попал вечером, привлечённый приятным ароматом, и не мог оттуда выбраться, так как цветок закрылся. Скажи мне число пчёл роя.

1221. Несколько одноклассников организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии, а всего было сыграно 28 партий. Сколько было участников турнира?

1222. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков — и на сколько?

1223. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников, вместе взятых. Сколько было участников турнира?

1224. Несколько учащихся 9А и 9Б классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9А класса вместе набрали 26 очков, а учащиеся 9Б класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира?

1225. Если поезд, идущий из города A в город B, уменьшит скорость движения на 10 км/ч, то время, за которое он пройдёт расстояние от города A до города B, увеличится на 25%. Определите скорость движения поезда.

1226. На первом участке пути в 96 км поезд шёл со скоростью на 2 км/ч большей, чем на втором участке в 69 км. Весь путь был пройден за 3 ч 30 мин. Определите скорость поезда на втором участке пути.

1227. Моторная лодка, собственная скорость которой 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами на реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Определите скорость течения реки.

1228. Для перевозки 75 т груза выделили несколько грузовиков. Однако 5 грузовиков перевели на другой участок, поэтому в каждый из оставшихся грузовиков пришлось погрузить на 0,5 т груза больше, чем предполагалось. Сколько грузовиков использовалось в перевозке груза?

1229. Сопротивление цепи двух параллельно соединённых проводников равно 15 Ом. Первый проводник имеет сопротивление на 16 Ом больше, чем второй. Определите сопротивление каждого проводника.

1230. Груз весом 60 кг производит некоторое давление на опору. Если вес груза уменьшить на 10 кг, а площадь опоры — на 5 дм^2, то давление увеличится на 1 кг/дм^2. Определите площадь опоры.

1231. Автомобиль с грузом проехал 140 км с некоторой постоянной скоростью. На обратном пути, двигаясь порожняком, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше. Определите первоначальную скорость автомобиля.

1232. Из винтовки произведён выстрел вверх. Скорость пули при вылете из ствола винтовки равна 800 м/с. Считая, что выстрел произведён при $t = 0$ в точке $s = 0$ оси Os, напишите закон движения пули в случае, если:

а) ось Os направлена вверх; б) ось Os направлена вниз.

1233. С какой высоты падала на землю (начальная скорость v_0 равна 0 м/с) материальная точка, если её падение продолжалось 5 с? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение земного притяжения считать равным 10 м/с^2.

1234. Сколько времени будет падать на землю материальная точка с высоты 10 000 м? Ответ дайте приближённо с точностью до 1 с. Сопротивлением воздуха пренебречь, $g \approx 10$ м/с^2, $v_0 = 0$ м/с.

1235. Материальная точка падает на землю по закону $h = 5t^2$ (h измеряется в метрах, t — в секундах). Определите приближённо среднюю скорость точки за промежутки времени между:
а) $t_1 = 0$ и $t_2 = 0{,}1$; б) $t_1 = 1$ и $t_2 = 1{,}1$;
в) $t_1 = 2$ и $t_2 = 2{,}1$; г) $t_1 = 3$ и $t_2 = 3{,}1$.

1236. Закон прямолинейного движения материальной точки задан формулой:
а) $s = 5t^2$, $t \geqslant 0$; б) $s = 10t + 5t^2$, $t \geqslant 0$;
в) $s = 10t - 5t^2$, $t \geqslant 0$.
1) Нарисуйте график движения.
2) Определите s в момент времени $t = 0$.
3) Определите скорость точки в момент времени $t = 0$.
4) Укажите, в какую сторону направлена сила, действующая на точку.

1237. Материальная точка движется с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Сколько времени точка будет находиться в движении и на какую высоту от поверхности земли она поднимется? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1238. С поверхности земли вертикально вверх брошен камень с начальной скоростью v_0 (м/с). Через сколько секунд камень упадёт на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Решите задачу, если:
а) $v_0 = 15$ м/с; б) $v_0 = 25$ м/с.

1239. Спелеолог для выяснения глубины подземной полости бросил вниз без начальной скорости камень. Звук от падения камня на дно полости дошёл до спелеолога через 3 с. Какова глубина подземной полости, если принять скорость звука равной 330 м/с и пренебречь сопротивлением воздуха? Считать, что $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

1240. Парашютист покинул летящий самолёт на высоте 3 км и через 3 мин приземлился. Определите время его снижения до раскрытия парашюта и с раскрытым парашютом, если средняя скорость снижения с раскрытым парашютом равна 6 м/с. Сопротивлением воздуха при снижении без парашюта пренебречь. Считать, что $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

1241. На 720 р. должны были приобрести несколько радиоприёмников, но цена каждого из них снизилась на 24 р., поэтому купили на один радиоприёмник больше, чем планировалось. Сколько купили радиоприёмников, если их цена одинаковая?

1242. При постройке здания требовалось вынуть 8000 м^3 земли в определённый срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней, так как бригада ежедневно перевыполняла план на 50 м^3. Определите, в какой срок должна была быть выполнена работа, а также ежедневный процент выполнения плана.

1243. Бригада трактористов должна была вспахать участок целины площадью 120 га. Однако бригаде удалось увеличить норму дневной выработки на 2 га. В результате срок вспашки сократился на 2 дня. Каково было дневное задание бригаде и в какой срок нужно было выполнить работу?

1244. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. Отчалив от пристани A в 9 ч утра, теплоход поплыл по течению реки до пристани B. Простояв у пристани B один час, теплоход отправился в обратный рейс и прибыл к пристани A в 17 ч того же дня. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость теплохода, если известно, что на пути от пристани A до пристани B и от пристани B до пристани A она была одна и та же.

1245. Колонна солдат длиной l м движется со скоростью x м/мин. Из конца колонны в её начало отправляется сержант со скоростью y м/мин, затем с той же скоростью он возвращается в конец колонны. На путь туда и обратно сержант затратил t мин.
а) Выразите t, l, x, y через остальные величины.
б) Вычислите t, если $l = 510$, $x = 70$, $y = 100$.

1246. Колонна солдат длиной l движется с постоянной скоростью по шоссе. Курьер из конца колонны отправился в её начало. Достигнув начала колонны, он тут же повернул обратно и пошёл в конец колонны с той же скоростью. За это время колонна прошла расстояние s. Определите расстояние, которое прошёл курьер в оба конца, если:
а) $l = 400$ м, $s = 300$ м; б) $l = 300$ м, $s = 400$ м.

1247. Колонна солдат длиной l движется с постоянной скоростью по шоссе. Курьер из конца колонны отправился в её начало. Достигнув начала колонны, он тут же повернул обратно и пошёл в конец колонны с той же скоростью. Известно, что скорость курьера в n раз больше скорости колонны. Определите путь колонны за то время, которое курьер потратил на путь в оба конца, если:
а) $l = 250$ м, $n = 1{,}5$; б) $l = 300$ м, $n = 2$.

1248. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать шоссе за 18 рабочих дней. Если первая бригада, работая одна, выполнит $\frac{2}{3}$ всей работы, а вторая бригада — оставшуюся часть, то на ремонт шоссе понадобится 40 дней. За сколько дней каждая бригада, работая отдельно, может выполнить всю работу?

1249. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 ч. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется время на 4 ч большее, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

1250. Путь из села в город идёт сначала 15 км в гору, потом 6 км с горы. Велосипедист едет без остановок в гору с одной постоянной скоростью, с горы с другой. В один конец он ехал 3,1 ч, обратно — 2,5 ч. Какова скорость велосипедиста в гору и с горы?

1251. Теплоход за 10 ч может пройти 110 км по течению и 70 км против течения реки или 88 км по течению и 84 км против течения реки. Определите скорость теплохода относительно воды и скорость течения реки.

1252. Бригада лесорубов должна была в несколько дней по плану заготовить 216 м^3 дров. Первые 3 дня бригада работала по плану, а затем каждый день заготовляла на 8 м^3 дров больше плана. В результате уже за день до срока было заготовлено 232 м^3 дров. Сколько кубометров должна была заготовлять бригада в день по плану?

1253. Проценты содержания (по массе) красителя в трёх растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% красителя. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% красителя. Сколько процентов красителя содержит первый раствор?

1254. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 34 км. В 4 км от пункта A первый пешеход (вышедший из пункта A) сделал остановку на 1 ч 30 мин. После остановки он увеличил скорость на 2 км/ч и встретил второго пешехода в 18 км от пункта B. Если бы первый пешеход не делал остановки и шёл всё время с первоначальной скоростью, то пешеходы встретились бы на полпути. Определите скорость второго пешехода.

1255. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 525 км, выехал мотоциклист. Через некоторое время из пункта B в пункт A выехала машина, которая встретилась с мотоциклистом в тот момент, когда он проехал $\frac{3}{7}$ расстояния от пункта A до пункта B. Мотоциклист и машина продолжали двигаться дальше, и мотоциклист приехал в пункт B через 3 ч после того, как машина прибыла в пункт A. Если бы машина выехала из пункта B на 1,5 ч раньше, чем в действительности, то она встретилась бы с мотоциклистом на расстоянии 180 км от пункта A. Определите скорость мотоциклиста.

1256. Проливной дождь лил несколько часов подряд. Когда он наполнил некоторую часть открытого бассейна, включили насос для откачки воды. Он откачал воду за 5 ч, на протяжении которых дождь продолжал лить. Если бы вместо первого насоса включили второй, мощность которого в 2 раза больше, то он откачал бы воду за 2 ч. За сколько часов откачали бы воду два насоса при совместной работе? Считайте процессы наполнения бассейна и откачки воды равномерными.

1257. а) На лугу растёт трава. 20 коров съедят всю траву за 21 день, а 30 коров — за 7 дней. За сколько дней всю траву на лугу могли бы съесть 22 коровы?

б) На лугу растёт трава. 6 коров съедят всю траву за 6 дней, а 7 коров — за 4 дня. Сколько коров могли бы съесть всю траву на лугу за 2 дня?

в) На лугу растёт трава. 60 коров могли бы прокормиться на этом лугу в течение 14 дней, а 50 коров — в течение 28 дней. Сколько коров могли бы пастись на этом лугу постоянно, пока растёт трава?

1258. *Задача И. Ньютона.* Двенадцать быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера[1] пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель. Сколько быков съедят траву на 24 югерах пастбища за 18 недель?

[1] 1 югер — древняя римская мера площади около 2500 м^2.

Задания для самоконтроля по программе 7—9 классов

1. 1) Вычислите $\left(5{,}25-4\frac{21}{40}\right):1{,}45-\left(7\frac{1}{3}-6{,}875\right):0{,}75.$

2) Упростите выражение $\left(\frac{x^2+4}{x^2-4x+4}+\frac{x-2}{2-x}\right):\frac{4}{x^2-4}.$

3) Постройте график функции $y=x-1$. Определите интервал, на котором функция принимает положительные значения.
4) Сумма двух чисел равна 2, а их произведение равно –35. Найдите эти числа.

2. 1) Вычислите $5\frac{1}{6}+\left(3{,}25+2\frac{1}{6}\right):2{,}6-\frac{2}{3}\cdot 2{,}25.$

2) Упростите выражение $\left(\frac{x^2+9}{x^2-6x+9}+\frac{x-3}{3-x}\right):\frac{9}{x^2-9}.$

3) Постройте график функции $y=-2x-2$. Определите интервал, на котором функция принимает отрицательные значения.
4) Произведение двух чисел равно 20, а их разность равна 1. Найдите эти числа.

3. 1) Вычислите $2:2{,}25\cdot\frac{9}{32}-\frac{30}{103}\cdot\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right).$

2) Упростите выражение $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x-2}{1-x}-\frac{x^2+1}{x^2-1}.$

3) Постройте график функции $y=\frac{1}{3}x+1$. Определите, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.
4) Площадь прямоугольника равна 4 дм^2, а периметр равен 17 дм. Определите стороны прямоугольника.

4. 1) Вычислите $\left(4\frac{2}{3}:3{,}5+3{,}5:4\frac{2}{3}\right)\cdot 4{,}8.$

2) Упростите выражение $\frac{a^2-a}{9-a^2}-\frac{a-1}{a+3}+\frac{a-2}{a-3}.$

3) Постройте график функции $y=-0{,}5x+2$. Определите, при каких значениях x функция принимает положительные значения.
4) Одна сторона прямоугольника на 3 м короче другой. Определите стороны прямоугольника, если его площадь равна 1,75 м^2.

5. 1) Вычислите $\dfrac{12{,}8 \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4{,}125}{2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}}$.

2) Упростите выражение $2m - \dfrac{m-4}{m^2+8m+16} : \dfrac{1}{16-m^2}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

6. 1) Вычислите $\dfrac{28{,}8 : 13\frac{5}{7} + 6{,}6 \cdot 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{80} : 1{,}35}$.

2) Упростите выражение $3x + \dfrac{2-x}{x^2+2x+1} : \dfrac{1}{1-x^2}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$

7. 1) Вычислите $\dfrac{(0{,}29 - 1{,}09) \cdot 1{,}25}{\left(18{,}9 - 16\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}}$.

2) Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 3x + y = -1. \end{cases}$$

4) Фрезеровщик должен изготовить к определённому сроку 80 деталей. Если он будет изготавливать за смену на одну деталь больше, чем предусмотрено планом, то закончит работу на 4 дня раньше срока. За сколько дней планировалось выполнить работу?

8. 1) Вычислите $\dfrac{(2{,}2 + 1{,}6) : 1{,}9}{(2{,}4 - 1{,}3) : 4{,}3}$.

2) Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - 2y = 8. \end{cases}$$

4) Скорость товарного поезда на 12 км/ч меньше скорости пассажирского поезда. Определите время, которое понадобится товарному поезду для прохождения участка длиной 52 км, если пассажирский поезд проходит такой участок быстрее товарного на 18 мин.

9. 1) Решите неравенство $3x^2 \leqslant 10x - 3$.

2) Упростите выражение $\sqrt{\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}}$.

3) Решите уравнение

$$(x + 2)(x - 1)(x + 1) - (x - 2)(x - 3)(x + 3) + 3x - 49 = 0.$$

4) Решите уравнение $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x} - 1 = 0$.

10. 1) Постройте график функции $y = \dfrac{3}{x}$.

2) Решите уравнение $\sqrt{x - 3} = 3$.

3) Упростите выражение $\left(\dfrac{6a + 3}{a^2 - 18a} + \dfrac{6a - 3}{a^2 + 18a}\right) \cdot \dfrac{a^2 - 324}{a^2 + 9}$.

4) Решите уравнение

$$(x^2 + 1)(x - 2) - (x^2 + 3)(x - 1) + 7x - 1 = 0.$$

11. 1) Два автомобиля выезжают из одного города в другой. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, поэтому он проезжает весь путь на 1 ч быстрее второго. Определите скорости автомобилей, если расстояние между городами равно 560 км.

2) Решите уравнение $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{4} - \dfrac{2x + 1}{6} = \dfrac{3x^2 + 2x}{8}$.

3) Решите неравенство $4x^2 + 6x < 9x^2 - 14x$.

4) Постройте график функции $y = -\dfrac{6}{x}$.

12. 1) Решите уравнение $\frac{2x^2+1}{3} - 1 = \frac{x^2 - 2x + 16}{8}$.

2) Решите неравенство $\frac{2y - 16}{y + 7} < 0$.

3) Решите уравнение $x - 10\sqrt{x} - 11 = 0$.

4) Сравните числа $\sqrt{6} + \sqrt{8}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{11}$.

13. 1) Вычислите $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3} - (0{,}3)^{-3} \cdot (-0{,}3)^4 - \left(7\frac{8}{9}\right)^0 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{4x}$.

3) Постройте график функции $y = x^2 - 3x + 1$.

4) Произведение двух целых чисел равно 30, а их сумма равна 11. Найдите эти числа.

14. 1) Вычислите $\frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{5}{12} : \left(2{,}5 \cdot \frac{1}{3} - 0{,}875\right)$.

2) Упростите выражение $\frac{a}{a^2 - 4} + \frac{a}{a+2} \cdot \left(\frac{a}{a^2 - a} - \frac{1}{a-1}\right)$.

3) Постройте график функции $y = 2x - x^2$.

4) Сумма двух целых чисел равна 6, а их произведение равно –7. Найдите эти числа.

15. 1) Вычислите $27\sqrt{1\frac{2}{3}} - 3\sqrt{60} - 15\sqrt{0{,}6} + 18\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

2) Упростите выражение $\frac{1}{\left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} - \frac{16}{a^2-4}\right) + 2}$.

3) Постройте график функции $y = 0{,}2x^2 - 3$.

4) Произведение двух чисел равно 3,5, а их разность равна 6,5. Найдите эти числа.

16. 1) Вычислите $\left(4\frac{5}{12} - 4\frac{4}{15}\right) \cdot 0{,}4 + 0{,}4$.

2) Упростите выражение $\frac{x}{x+3} + \frac{3x}{x-3} \cdot \left(\frac{3}{x^2 - 3x} - \frac{x-9}{9 - x^2}\right)$.

3) Постройте график функции $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5$.

4) Разность двух чисел равна –9,7, а их произведение равно –12,3. Найдите эти числа.

17. 1) Вычислите $351^3 - 351^2 - 351 \cdot 350 - 350^2 - 350^3$.

2) Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

3) Десятый член арифметической прогрессии равен 17, а пятый член равен 4. Найдите сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

18. 1) Решите графическим способом уравнение

$$-\frac{12}{x} = 1 - x.$$

2) Двадцатый член арифметической прогрессии равен 20, а сумма первых двадцати членов равна 430. Найдите разность прогрессии.

3) Найдите область определения функции $y = \frac{1}{1 + x}$.

4) Решите неравенство $20 - \frac{1}{5}x > 0$.

19. 1) Разность арифметической прогрессии равна 0,4, а сумма первых шести её членов равна 30. Найдите десятый член прогрессии.

2) Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1}\right)(x - \sqrt{x}).$$

3) Решите уравнение $|2x - 7| = 3$.

4) Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 5x}$.

20. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 1,5, а сумма первых двадцати членов равна 505. Найдите разность прогрессии. Есть ли среди членов прогрессии число 29?

2) Упростите выражение

$$c + \left(\frac{c^3 - 1}{c - 1} - 2c\right) : (c^2 - c + 1).$$

3) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x - 2)(x - 3)}.$$

4) Решите неравенство $5x \geqslant 8(x - 3) - 17$.

21. 1) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_{11} + a_6 = 22$, $a_7 + a_5 = 16$.

2) Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$.

3) Решите неравенство $\dfrac{x+2}{1-4x} < 2$.

4) Упростите выражение $\dfrac{9x^2-4}{2x^2-5x+2} \cdot \dfrac{2-x}{3x+2} + \dfrac{x}{1-2x}$.

22. 1) Расстояние между станциями A и B равно 240 км. Из B в A вышел поезд. Через 30 мин навстречу ему из A вышел другой поезд со скоростью на 12 км/ч большей. Найдите скорость каждого поезда, если известно, что они встретились на середине пути.

2) Решите уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3$.

3) Решите неравенство $\dfrac{3x+2}{2x+3} > 4$.

4) Упростите выражение $\left(\dfrac{m}{m-6} - \dfrac{2m}{m^2-12m+36}\right) \cdot \dfrac{36-m^2}{m-8} + \dfrac{12m}{m-6}$.

23. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 10, разность равна 4. Найдите её одиннадцатый член и сумму первых одиннадцати членов.

2) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3(x-1) = 5(y+1), \\ \dfrac{7x-3y}{5} = \dfrac{5x-y}{3} - \dfrac{x+y}{2}. \end{cases}$$

4) Решите уравнение $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$.

24. 1) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если формула n-го её члена $b_n = 4 \cdot (0{,}5)^{n-1}$.

2) Решите неравенство $\dfrac{1+4y}{1-3y} < 1$.

3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

4) Сравните значения выражений $(0{,}7)^{-5}$ и $(0{,}7)^0$.

25. 1) Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, зная, что прогрессия возрастающая и $b_4 \cdot b_5 = 3b_8$, $b_1 + b_3 = 15$.

2) Решите уравнение $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$.

3) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-9}{4} - x \geqslant \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}, \\ 2 - x \leqslant 2x - 8. \end{cases}$$

4) Упростите выражение $\frac{1}{x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^{-4}}$ и найдите его значение при $x = -2$.

26. 1) Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч быстрее, чем второй рабочий, работая отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

2) Решите уравнение $(x^2 - 6x)^2 - 6(x^2 - 6x) + 9 = 81$.

3) Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 2, \\ \frac{7}{x} + \frac{10}{y} = 9. \end{cases}$

4) Сравните значения выражений $8^{1,2}$ и $0,5^{-2}$.

27. 1) Найдите двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение этого числа на сумму его цифр равно 144.

2) Решите графически уравнение $x^2 - 4x = -3x + 6$.

3) Решите неравенство $\frac{(x-5)(x+7)}{x} < 0$.

4) Упростите выражение $\frac{a^{-9}}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ и найдите его значение при $a = \frac{1}{2}$.

28. 1) Решите уравнение $\frac{x^2 - 7x}{5} + \frac{x-1}{3} = \frac{2x^2 - 5x - 3}{30}$.

2) Решите неравенство $\frac{2x-3}{3x-7} < 0$.

3) Решите уравнение $x^2 + x^{-2} = 2$.

4) Сравните числа $\sqrt{\frac{17}{19}} \cdot \sqrt{\frac{13}{23}}$ и $\sqrt{\frac{17}{23}} \cdot \sqrt{\frac{13}{19}}$.

29. 1) Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч большей, чем полагается по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

2) Решите уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

3) Решите неравенство $0{,}01(1 - 3x) < 0{,}02x + 3{,}01$.

4) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x}.$$

30. 1) Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

2) Решите неравенство $\dfrac{2x-1}{x} > 0$.

3) Найдите значение выражения

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

при $x = 2\dfrac{3}{17}$.

4) Решите графическим способом уравнение $x - 1 = \dfrac{6}{x}$.

31. 1) Найдите значение выражения $\sqrt{18} - (\sqrt{32} - (5\sqrt{2} + \sqrt{200}))$.

2) Укажите точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ с осями координат.

3) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$.

4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6y = -14, \\ y^2 - 4x = 1. \end{cases}$$

32. 1) Найдите значение выражения $a^2 - 6\sqrt{5}a - 1$ при $a = \sqrt{5} + 4$.

2) Решите уравнение

$$\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}.$$

3) На турбазе имеются палатки и домики, всего их 25. В каждом домике живут 4 человека, а в палатке — 2 человека. Сколько на турбазе палаток и сколько домиков, если на турбазе отдыхают 70 человек?

4) С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = x^3, \\ xy = 4. \end{cases}$$

33. 1) Решите уравнение $\frac{2x+5}{x^2+x} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x+1} = 0$.

2) Решите неравенство $\frac{1}{9}x^2 \leqslant 1$ и укажите все его целые решения.

3) В первом зрительном зале 420 мест, а во втором 480. Во втором зале на 5 рядов меньше, чем в первом, но в каждом ряду на 10 мест больше, чем в каждом ряду первого зала. Сколько мест в ряду в каждом из залов?

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13, \\ x + y = -2. \end{cases}$

34. 1) Вычислите, используя, где возможно, формулы сокращённого умножения:

$$\frac{0{,}12^3 - 0{,}28^3}{0{,}16} - 0{,}12 \cdot 0{,}28.$$

2) В арифметической прогрессии $\frac{a_{133}}{a_5} = 17$. Найдите $\frac{a_{25}}{a_{47}}$.

3) Упростите выражение $\frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$, найдите значение этого выражения, если $x + y = 1{,}7$.

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \frac{3y+3}{3x-1} + \frac{2x+2}{3y-1} = 1. \end{cases}$

35. 1) Выполните указанные действия:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4\sqrt{15}\right) \cdot \sqrt{12} - 4\sqrt{6} - 24\sqrt{5}.$$

2) Бак объёмом 1 м^3 заполняется двумя насосами одновременно. Первый насос перекачивает за 1 ч на 1 м^3 воды больше, чем второй. Найдите время, за которое каждый насос в отдельности может наполнить бак, если первому насосу нужно для этого на 5 мин меньше, чем второму.

3) Упростите выражение $\frac{xy}{x+y} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$, найдите значение этого выражения, если $x - y = 2{,}9$.

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x + 1 = 0, \\ \frac{x}{x-y} + 2 = 0. \end{cases}$

36. 1) Решите уравнение $|1 + 3x| - |x - 1| = 2 - x$.

2) Упростите выражение $\dfrac{6x^2 + x - 7}{13x - 10x^2 - 3}$ и определите, какие значения оно может принимать.

3) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, а седьмой равен $\sqrt{128}$. Найдите восьмой член прогрессии.

4) Решите уравнение $\dfrac{6}{(x - 1)(x + 3)} - \dfrac{24}{(x - 2)(x + 4)} = 1$.

37. 1) Пусть остаток от деления натурального числа n на 9 равен 5. Найдите остаток от деления на 9 числа $4n^2 + 7n + 2$.

2) В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ имеем $a_1 = -85$, a_{19} — её первый положительный член. Какие целые значения может принимать разность прогрессии?

3) Найдите наименьшее значение выражения

$$2\sqrt{x + y + 1} - 4 + 3(x + 4y - 3)^2.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

4) Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3375 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 2916 р. Первый брокер продал 60% своих акций, а второй — 70%. При этом сумма от продажи акций, полученная первым брокером, в $1\dfrac{2}{7}$ раза превысила сумму, полученную вторым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

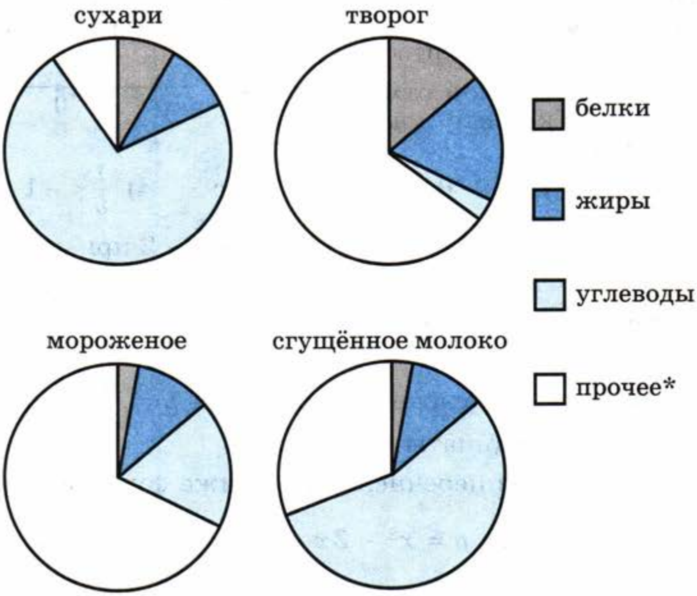
Задания из тренировочных вариантов ГИА

1. Запишите в ответе номера тех выражений, значение которых равно 0.

1) $(-1)^3 + (-1)^3$ **2)** $(-1)^2 - (-1)^2$ **3)** $-1^5 + (-1)^3$ **4)** $-1^5 - (-1)^5$

2. На диаграмме показано распределение питательных веществ в сливочных сухарях, твороге, сливочном мороженом и сгущённом молоке. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание углеводов наибольшее. (* — к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.)

1) сухари **2)** творог **3)** мороженое **4)** сгущённое молоко



3. Товар на распродаже уценили на 20%, при этом он стал стоить 920 р. Сколько стоил товар до распродажи?

1) 1150 р. **2)** 1104 р. **3)** 940 р. **4)** 184 р.

4. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 5 ч?

5. В фирме такси в данный момент свободно 3 чёрных, 3 жёлтых и 14 зелёных машины. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к заказчику приедет жёлтое такси.

6. Найдите значение выражения $\frac{95}{\left(5\sqrt{5}\right)^2}$.

1) $\frac{19}{3125}$ 2) $\frac{19}{625}$ 3) $\frac{19}{25}$ 4) $\frac{19}{5}$

7. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ заданы формулами n-го члена. Поставьте в соответствие каждой последовательности верное утверждение.

ФОРМУЛА

А) $a_n = 6 \cdot 7^n$ Б) $b_n = 7n + 2$ В) $c_n = 5n^2 + 2$

УТВЕРЖДЕНИЕ

1) Последовательность — арифметическая прогрессия
2) Последовательность — геометрическая прогрессия
3) Последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией

8. На числовой прямой отмечены числа a, b, c. Укажите номер верного утверждения.

1) $b^2 > c^2$ 2) $\frac{c}{a} > 0$ 3) $a + b < c$ 4) $\frac{1}{b} < -1$

9. Найдите значение выражения $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} - 2$ при $x = -2$.

10. Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right) : \frac{3x}{x^2 - y^2}$.

11. На рисунке 1 изображены гипербола $y = \frac{6}{x}$ и прямая $y = 2x$. Вычислите координаты точки C.

12. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке 2?

1) $y = x^2 - 3$ 2) $y = x^2 - 3x$ 3) $y = x^2 + 3x$ 4) $y = -x^2 + 3$

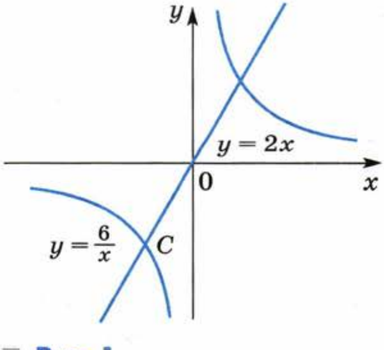


Рис. 1

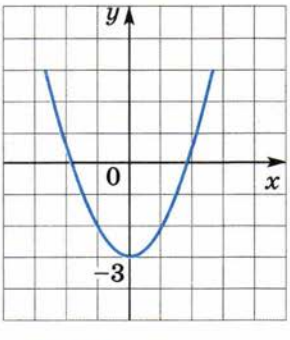


Рис. 2

13. Найдите корень уравнения $\frac{x-5}{x-11} = -5$.

14. Решите неравенство $x^2 + 8x + 15 < 0$.

15. Сократите дробь $\frac{5^2 \cdot 100^n}{2^{2n} \cdot 5^{2n}}$.

16. Первая труба пропускает на 4 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 48 л она заполняет на 2 мин дольше, чем вторая труба?

17. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x+1}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Задания на исследование

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение:
а) $ax^2 - (4a + 1)x + 9a = 0$; б) $ax^2 + (3a - 1)x - 4a = 0$;
в) $ax^2 - (2a + 1)x + a = 0$; г) $4ax^2 - 4x + a - 1 = 0$
имеет единственный корень; имеет два различных корня; не имеет корней.

2. Найдите наименьшее значение суммы $x^2 + y^2$, если $(x; y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = a, \\ 3x - y = a + 2. \end{cases}$ При каком значении a достигается это наименьшее значение?

3. Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство $ax^2 - (2a + 1)x + a > 0$ не имеет решений.

4. При каких значениях a система неравенств:
а) $\begin{cases} 4x - 4a > 2ax - 5, \\ 6x - 2a < 3ax + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x - 2a > 3ax - 1, \\ 6x - 3a < 2ax + 2 \end{cases}$
имеет решения?

5. При каких значениях a система неравенств:
а) $\begin{cases} 9x - 5a > 3ax + 2, \\ 6x + 2a < 2ax - 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x - 2a > 3ax + 13, \\ 4x + 4a < 2ax - 5 \end{cases}$
не имеет решений?

6. В период бурного роста цен Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение 12, 6 и 3 месяцев выплачивал доход в размере 150%, 130% и 120% годовых соответственно. Какой доход можно было получить за год:
а) при двукратном вложении денег на 6 месяцев;
б) при четырёхкратном вложении денег на 3 месяца?

7. Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год под p% годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев?
Решите задачу в общем виде, проведите расчёты для $p = 150$.

8. Из пункта A в пункт B по течению реки надо отбуксировать два плота с помощью катера, собственная скорость которого 20 км/ч. Катер может буксировать только один плот. Предложите способ буксировки, при котором оба плота будут переправлены из пункта A в пункт B за наименьшее время, если скорость течения реки 3 км/ч, а расстояниие AB равно 58 км. Найдите наименьшее время буксировки плотов.

9. а) Теплоход по течению реки от A до B идёт a ч, а от B до A он идёт b ч. Расстояние AB равно 36 км, скорость течения реки равна 3 км/ч. Какому числовому промежутку принадлежат значения b, если $3 \leqslant a \leqslant 4$?
б) Теплоход по течению реки от A до B идёт a ч, а от B до A он идёт b ч. Расстояние AB равно 48 км, скорость течения реки равна 2 км/ч. Какому числовому промежутку принадлежат значения a, если $4 \leqslant b \leqslant 6$?

10. а) Пешеход может пройти расстояние AB за a ч, а велосипедист может проехать то же расстояние за b ч. Однажды они отправились одновременно навстречу друг другу — пешеход из A, велосипедист из B — и встретились через t ч. Какому числовому промежутку принадлежат значения t, если $20 \leqslant a \leqslant 24$ и $5 \leqslant b \leqslant 8$?
б) Первая труба наполнит бассейн за a ч, вторая — за b ч, а при совместной работе они наполнят тот же бассейн за t ч. Какому числовому промежутку принадлежат значения t, если $20 \leqslant a \leqslant 24$ и $30 \leqslant b \leqslant 40$?

Назовём **чётным факториалом** (или двойным факториалом) число $n!!$ — произведение всех чётных чисел, не превосходящих n, а **нечётным факториалом** (или тройным факториалом) число $n!!!$ — произведение всех нечётных чисел, не превосходящих n ($n > 4$). Например, $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, $6!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, $7!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, $7!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

11. Определите последнюю цифру в записи числа $2007!!!$.

12. Определите, на сколько нулей заканчивается запись числа $100!!$.

13. Определите последнюю отличную от нуля цифру в записи числа $30!!$.

Доказываем. Докажите **(14—18)**:

14. Если n — натуральное число и $n > 4$, то $n!! \cdot n!!! = n!$.

15. Если n — чётное число большее 4, то $n!! > n!!!$.

16. Если n — нечётное число большее 4, то $n!! < n!!!$.

17. Если $n!! > n!!!$ и n — натуральное число, $n > 4$, то n — чётное число.

18. Если $n!! < n!!!$, то n — нечётное число.

Решите задачи **(19—20)**:

19. Сколько лет Васе, если чётный факториал его возраста больше нечётного факториала его возраста в $\frac{1024}{231}$ раза?

20. Сколько лет Дусе, если нечётный факториал её возраста больше чётного факториала её возраста в $\frac{3003}{1024}$ раза?

Список дополнительной литературы

1. *Агаханов Н. Х.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. *Галкин Е. В.* Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
3. *Гашков С. Б.* Примени математику / С. Б. Гашков, С. Н. Олехник, С. Б. Сергеев. — М.: Наука, 1989.
4. ГИА. Математика. 9 класс. Государственная (итоговая) аттестация (в новой форме). Типовые задания / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, А. С. Трепалин и др. — М.: Экзамен, 2011.
5. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
6. *Дорофеева А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
7. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М.: Наука, 1979.
8. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М.: Наука, 1991.
9. *Нестеренко Ю. В.* Задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
10. *Нестеренко Ю. В.* Лучшие задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: АСТ-ПРЕСС, 1999.
11. *Олехник С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
12. *Перельман Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М.: Наука, 1978.
13. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ; Астрель, 2002.
14. *Пичурин Л. Ф.* За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.
15. *Симонов Р. А.* Кирик-Новгородец — учёный XII века / Р. А. Симонов. — М.: Наука, 1980.
16. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.
17. *Чистяков В. Д.* Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями / В. Д. Чистяков. — Минск: Изд-во Мин-ва высшего, средн. спец. и проф. обр., 1962.

18. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике. 7—11 классы. — М.: Илекса, 2011.

19. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада. Задачи и решения. Вып. 1. — М.: Илекса, 2008.

20. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада. Задачи и решения. Вып. 2. — М.: Илекса, 2008.

Интернет-библиотеки

21. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета: http://lib.mexmat.ru/books/3275

22. Интернет-библиотека сайта Московского центра непрерывного математического образования: http://ilib.mirror1.mccme.ru/

23. Математические этюды: http://etudes.ru/

Предметный указатель

Ответы

§ 1

2. а) $x > 1$; б) $x < 0$; в) $-1 < x < 3$. **9.** а) Нет; б) нет; в) да; -4; г) да; 0. **14.** а) $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; 198{,}8)$; в) $\left(1\frac{11}{14}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 0{,}9)$. **15.** а) $\left(5\frac{14}{15}; +\infty\right)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 27{,}55)$. **16.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $(-20; +\infty)$. **23.** а) $(2; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$; г) $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right)$; д) $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **25.** а) $\left(-\infty; 66\frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{40}; +\infty\right)$. **27.** а) $y > 0$ при $x \in (-1; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$. **29.** а) $(-2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **34.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1)$; г) $(-\infty; -6{,}5)$. **35.** а) $(-\infty; 3)$; б) $\left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -0{,}5)$; г) $\left(-\infty; -\frac{4}{11}\right)$. **36.** а) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений. **37.** в) Нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$. **38.** а) $(-\infty; 24)$; б) $(-\infty; 6)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(5; +\infty)$; д) $(-1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **40.** д) Нет решений; е) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **41.** а) $(-\infty; 3)$; б) $(2{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0{,}5)$; г) нет решений. **43.** в) $(-\infty; -2{,}4)$; г) $(8; +\infty)$; д) $(5{,}25; +\infty)$; е) $\left(3\frac{1}{6}; +\infty\right)$; ж) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; з) нет решений. **44.** а) Нет; б) нет. **45.** а) Да; б) да. **46.** а) $(0; +\infty)$; б) $(1; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$. **54.** а) $(-\infty; 3)$; б) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; в) $(1; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}5)$; ж) нет решений; з) $(-\infty; -1)$. **55.** а) $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{9}{20}\right)$; б) $(12; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$; г) нет решений. **61.** а) $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; б) $(-3{,}5; 28)$; в) $(-3; -2)$; г) $(-1; 4)$; д) $\left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$; е) $(-18; -10)$. **62.** а) При $a \in (1; +\infty)$; б) при $a \in (-\infty; 3]$; в) при $a \in (-3; -1]$. **63.** а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-1; 1)$; д) $(-3; 3)$; е) нет решений. **64.** а) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(1; 3)$; д) $(-1; 3)$; е) нет решений. **65.** а) $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-5; 1)$; д) $(-5; 3)$; е) нет решений. **66.** а) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; в) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$; г) $(1; 2)$; д) $(-2; 1)$; е) $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$. **67.** а) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; +\infty)$; в) $(-4; 4)$; г) $(-4; -1) \cup (1; 4)$. **68.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $(1; +\infty)$; г) $(-1; +\infty)$. **69.** а) При $a \leqslant -2$; б) при $a = 3$.

§ 2

73. а) 9; б) 1; в) 29; г) 21. **74.** а) Да; б) нет. **75.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **84.** а) $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{12}\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; -\frac{40}{7}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{1}{16}; +\infty\right)$. **85.** д) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \cup (0; +\infty)$; е) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **87.** а) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup$ $\cup (\sqrt{3}; +\infty)$; б) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$; в) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; г) $(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$. **88.** а) $(0; 2)$; б) $\left(0; 1\frac{7}{13}\right)$; в) $\left(0; 3\frac{1}{2}\right)$; г) $(-\infty; 0) \cup \left(1\frac{29}{35}; +\infty\right)$. **89.** а) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{7}; +\infty\right)$. **91.** а) $(-\infty; 4) \cup (12; +\infty)$; б) $(-12; -4)$; в) $(4; 12)$; г) $(-\infty; -12) \cup (-4; +\infty)$; д) $\left(\frac{1-\sqrt{141}}{10}; \frac{1+\sqrt{141}}{10}\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$; ж) $\left(-\infty; \frac{17-\sqrt{249}}{4}\right) \cup \left(\frac{17+\sqrt{249}}{4}; +\infty\right)$; з) $\left(\frac{-15-\sqrt{177}}{8}; \frac{-15+\sqrt{177}}{8}\right)$.
94. а) При $k = 2$; б) при $k = 6$. **97.** а) Все $x \neq 0$; б) все $x \neq 0$; в) все $x \neq -3$; г) все $x \neq 1$. **99.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **100.** а) $x \neq 4$. **101.** а) $x \neq 2$. **103.** а) Нет решений; б) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right) \cup \left(-\frac{1}{7}; +\infty\right)$; г) нет решений; д) $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$; е) нет решений. **104.** а) При $k = 144$; б) при $k = 48$. **105.** а) $x = -4$; б) x — любое действительное число. **109.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений. **112.** а) При $m > \frac{1}{8}$; б) при $m > \frac{1}{3}$. **118.** а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (3{,}5; +\infty)$; д) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; е) нет решений; ж) $(-\sqrt{1{,}5}; \sqrt{1{,}5})$; з) $(-\infty; +\infty)$.
119. а) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{145}}{20}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{145}}{20}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{13}}{6}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; \frac{23-\sqrt{241}}{18}\right) \cup \left(\frac{23+\sqrt{241}}{18}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; \frac{25-\sqrt{793}}{14}\right) \cup \left(\frac{25+\sqrt{793}}{14}; +\infty\right)$.
120. а) $(-\infty; 0) \cup (0{,}8; +\infty)$; б) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $(1; 2)$; г) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.
121. а) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; б) нет решений; в) нет решений; г) $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{69}}{5}\right) \cup$

$\cup\left(\frac{-3+\sqrt{69}}{5};+\infty\right)$; д) $\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$; е) $(-\infty;+\infty)$. **123.** а) $(1; 5)$; б) $(-\infty; -4)\cup(-2; 0)\cup(2; +\infty)$; в) $(-3; -2)\cup(0; 2)\cup(4; 5)$; г) $(-7; -6)\cup$ $\cup(-4; 0)\cup(2; 3)$. **124.** а) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$.

§ 3

134. а) $(1; 3)\cup(5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)\cup(2; 4)$; в) $(-1; 1)\cup(2; +\infty)$; г) $(-\infty; -2)\cup$ $\cup(-1; 3)$. **135.** а) $(-\infty; -1)\cup(-1; 0)$; б) $(-\infty; -5)\cup(-4; 0)\cup(2; +\infty)$; в) $(-\infty; -4)\cup$ $\cup(0; 2)$; г) $(-\infty; -1)\cup(0; 3)\cup(8; +\infty)$. **136.** а) $(-3; 2)\cup(7; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup\left(1; \frac{4}{3}\right)$. **137.** в) $(-4; -1)\cup(3; 4)$; г) $(-\infty; -5)\cup(-1; 3)\cup(6; +\infty)$. **138.** а) $(-4; -2)\cup$ $\cup(-1; 2)\cup(4; +\infty)$. **139.** а) $(1; 2)\cup(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; д) $(-\infty; -4)\cup(-3; 1)\cup$ $\cup(1; 3)$; и) $(-\infty; 1)\cup(1; 3)$; к) $(-\infty; 2)\cup(2; 3)$. **140.** а) Если $3 \leqslant a \leqslant 5$, то множество решений неравенства состоит из двух интервалов, если $a < 3$ или $a > 5$, то множество решений неравенства состоит из трёх интервалов. **143.** а) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$; в) $(-3; 5)$. **146.** а) $(-2; 1)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)\cup$ $\cup(-1; 2)$. **147.** а) $(-1; 0)\cup\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; б) $(0; 2)\cup(3; +\infty)$; в) $(4; 6{,}5)$; г) $(-\infty; 0)\cup$ $\cup(0; 3)\cup(4; +\infty)$. **148.** а) $(-4; -1)\cup(1; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-7; 3)\cup(3; +\infty)$. **149.** а) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)\cup(-1; 4)\cup(6; +\infty)$; в) $(-\infty; -2)\cup$ $\cup(2; 6)$; г) $(-0{,}2; 0{,}2)\cup(0{,}2; 5)$. **150.** а) $(1; 6)$; б) $(-\infty; -7)\cup(3; +\infty)$. **151.** а) $(0; 1)$; б) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **152.** а) $(0; 1)$; б) $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(0; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$; в) $(0; 1)$; г) $(-\infty; -\sqrt{6})\cup(0; \sqrt{6})\cup(3; +\infty)$. **153.** а) $(3-\sqrt{5}; 1)\cup(3+\sqrt{5}; +\infty)$; б) $(-\infty; -3-\sqrt{3})\cup(-2; -3+\sqrt{3})$; в) $(-\sqrt{5}; -0{,}5)\cup(2; \sqrt{5})$; г) $\left(-\sqrt{3}; \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}; \sqrt{3}\right)$. **154.** а) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$; в) $(-\infty; 1)\cup(2; 3)\cup$ $\cup(3; +\infty)$; г) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)$. **156.** а) Если $-5 \leqslant a \leqslant 3$, то множество решений неравенства состоит из двух интервалов, если $a < -5$ или $a > 3$, то множество решений неравенства состоит из трёх интервалов. **159.** а) $(-1; 1)$; б) $(-3; 4)$. **162.** а) $(-\infty; -1)\cup(5; 10)\cup(10; +\infty)$; б) $(-3; -2)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)\cup$ $\cup(3; 7)\cup(7; +\infty)$; г) $(-3; -1)\cup(1; +\infty)$. **166.** а) $(-\infty; 1{,}5]$; б) $[0{,}75; +\infty)$; в) $[3{,}5; +\infty)$; г) $[-0{,}5; +\infty)$. **167.** а) $[4; 8]$; б) $[-6; -2]$; в) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{57}}{4}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{-1+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{5-\sqrt{37}}{6}; \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right]$. **168.** а) 1; б) $(-\infty; +\infty)$; в) -3; г) $(-\infty; +\infty)$. **169.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[-5; -2]$; в) нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$. **170.** а) $[-3; -1] \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [2; 7]$; в) $(-\infty; 2{,}4]$; г) $(-\infty; 2] \cup \{3\}$. **172.** а) $(-\infty; -3) \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-5; 2]$; в) $(-\infty; 3)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **173.** а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) $[-2; 8]$; г) $(-\infty; 5] \cup [7; +\infty)$. **174.** а) $[-2; 1] \cup \cup [3; 6]$; б) $[-4; -2] \cup [8; 10]$; в) $[-5; -3) \cup (-1; 1]$; г) $(-9; -7] \cup [-1; 1)$. **175.** а) $(-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$; б) $[3; 4] \cup [5; 6]$; в) $(-2; -1] \cup \{1\} \cup [3; 4)$; г) $[-1; 0) \cup (1; 3) \cup (4; 5]$. **176.** а) $[-1; 1) \cup (2; 3]$; в) $[2; 3]$. **177.** а) $[-3; -2) \cup \cup (-1; 1)$; б) $(-2; 1) \cup [2; +\infty)$; в) $(-2; 2)$; г) $[-5; -4)$. **178.** а) Нет решений; б) $(1; 4) \cup (4; +\infty)$; в) $(0{,}5; 1) \cup \{2\}$; г) $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \{3\}$; д) $\{-2; 3\}$; е) $\{-5\} \cup \cup [-2; -1]$. **179.** а) $(1; 2) \cup (4; 5)$; б) $[-4; -3] \cup [1; 2]$; в) $(-\infty; -3] \cup [-2; 0] \cup \cup [1; +\infty)$; г) $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; +\infty)$. **180.** а) $(-6; -4) \cup (-2; 0)$; б) $(-\infty; 0] \cup \cup [1; 5] \cup [6; +\infty)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-3; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $[-5; -4] \cup [0; 1]$. **181.** а) $[-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (0; 1]$; б) $(0; 1] \cup [2; 4] \cup [5; 6)$; в) $(-\infty; -1] \cup \cup (1; 2] \cup [4; 5) \cup [7; +\infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [2; 3) \cup (5; 6] \cup [7; +\infty)$. **182.** а) $(-\infty; -11] \cup \cup \{-4\} \cup [3; +\infty)$; б) $[-11; -3]$; в) $[-1; 2] \cup [4; 7]$; г) $[-6; -5] \cup [1; 2]$. **183.** а) $(-\infty; 1) \cup (2; 8) \cup (9; +\infty)$; б) $(-12; -8) \cup (-6; -2)$; в) $\left[-3; -\frac{8}{3}\right] \cup \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$; г) $(-\infty; 0{,}5] \cup [2; 4] \cup [5{,}5; +\infty)$. **184.** а) $(-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; 3)$; б) $(-5; -4) \cup \cup (-1; 1) \cup (4; 5)$; в) $(-3; -1) \cup (1; 3)$; г) $(-5; -4) \cup (4; 5)$; д) $[-3; -2] \cup \cup \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} \cup [1; 2]$; е) $[0; 2-\sqrt{3}] \cup \{1; 3\} \cup [2+\sqrt{3}; 4]$.

Дополнения к главе 1

193. а) 5; 5; 5; б) 30,3; 30,03; 30,0003. **198.** а) 2; б) -3; в) $4x - 3$; г) $-2x + 2$. **201.** а) C; б) $x + C$; в) $\frac{x^2}{2} + C$; г) $\frac{ax^2}{2} + bx + C$. **203.** а) $2x + C$; б) $\frac{3x^2}{2} - 2x + C$. **204.** а) $s(t) = 3t$, б) $s(t) = t^2$; в) $s(t) = t^2 + t$.

§ 4

211. а) Нет; б) да; в) да; г) да. **214.** а) При каждом $x \in (0; 1)$; б) при каждом $x \in (1; +\infty)$. **219.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **227.** а) Да; б) нет. **228.** а) Да; б) да. **231.** а) $x > x^5$; б) $x < x^5$; в) $x < x^5$; г) $x > x^5$. **232.** а) $x^4 < x^6$; б) $x^4 < x^6$; в) $x^4 > x^6$; г) $x^4 > x^6$.

§ 5

248. а) Да; б) нет; в) да. **261.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **263.** д) 2; е) 3; ж) $-0{,}6$; з) -5. **266.** а) 2; б) -1; в) -3; г) $\sqrt[3]{5}$; д) $\sqrt[3]{-7}$; е) 1; ж) 2; з) $\sqrt[5]{2}$.

270. а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **275.** а) 6; б) 5; в) 1; г) 6; д) 0. **276.** а) –1; 1; б) нет корней; в) 0; г) –3; 3. **280.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **282.** а) –10; б) 40; г) 0,7; д) $\frac{2}{15}$. **283.** д) 2; е) 2; ж) 5; з) 6. **284.** а) 12; б) 5; в) 0,9; г) 10. **286.** а) 6; б) 1. **287.** а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-2\sqrt[5]{2}$. **292.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{3}$. **293.** а) 8; б) 16; в) 1; г) 1. **294.** в) $\sqrt{2}-1$; г) $2-\sqrt{2}$; д) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; е) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$. **295.** в) $\sqrt[3]{6}$; е) $97\sqrt[3]{\frac{1}{12}}$. **298.** а) $k \leqslant 1$; б) $k \leqslant -1$. **301.** а) $-\sqrt[4]{15}$; $\sqrt[4]{15}$; б) $\sqrt[3]{26}$. **302.** а) –2; 2; б) –1; $\sqrt[3]{4}$; в) –1; 1. **307.** ж) 7; з) 5. **309.** е) $2cd\sqrt[4]{cd^2}$; ж) $-x\sqrt[4]{5}$. **311.** в) $\sqrt[11]{abc}$; г) $a\sqrt[3]{x}$. **320.** а) $\sqrt[4]{12}$; б) $\sqrt[6]{18}$; в) $\sqrt[9]{24}$; г) $\sqrt[8]{128}$. **324.** а) $\sqrt[9]{a}$; б) $\sqrt[12]{b}$; в) $\sqrt[6]{|y|^5}$; г) $\sqrt[3]{x^2}$. **325.** в) $\sqrt[8]{x^7}$; г) $\sqrt[27]{a^9b^3c}$. **328.** а) $\sqrt{a}-1$; б) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. **338.** а) $2>\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{12}<2$. **339.** а) $1<\sqrt[3]{3}<2$. **340.** а) $m<n$; б) $m>n$; в) $m>n$; г) $m<n$. **341.** а) $a>1$; б) $0<a<1$; в) $0<a<1$; г) $a>1$. **354.** а) $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}4$; б) $\sqrt[3]{6}\approx 1{,}8$. **355.** а) $\sqrt[3]{175}\approx 6$; б) $\sqrt[3]{241}\approx 6$. **358.** а) $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}442$. **360.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **361.** а) 3; б) 2; в) $\frac{81}{16}$; г) 10 000. **362.** а) 5; б) 17; в) 1; г) 3. **363.** а) Нет корней; б) 4; в) нет корней; г) 1; д) 1,5; е) 2,5. **364.** а) 6; б) 8; в) 2,5; г) 3,5. **365.** в) 0; 1,75; г) 1; $\frac{19}{36}$; д) 0; 1; 2; е) –4; –2; 0; ж) –1; з) –3; и) 1; 5; к) –3; 1. **366.** а) –1; б) –3; в) –5; 2; г) –3; 8; д) 3; е) 4. **367.** а) 2; 3; б) –2; 4; в) 3; 8; г) –3; 3; д) –8; 3. **368.** а) –6; б) –2.

Дополнения к главе 2

376. а) $\frac{343}{20}$; б) 4. **385.** а) $x^{0,75}$; б) $a^{\frac{5}{6}}$. **386.** а) $a^{\frac{8}{5}}$; б) 1. **387.** а) 125; б) $2^{1,5}$. **388.** а) a^{-1}; б) $z^{\frac{4}{15}}$. **389.** а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $x^{\frac{9}{8}}$. **392.** а) $\frac{1}{12}$; б) $-\frac{16}{225}$. **395.** а) $(a^{\frac{1}{2}}-1)\times$ $\times(a^{\frac{1}{2}}+1)$; б) $(b^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}})(b^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}})$. **400.** а) $\frac{\sqrt{a}}{2}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}$. **402.** а) $\frac{2}{a-1}$; б) $\frac{x+3y}{x-y}$.

§ 6

409. а) $a_n=n$; б) $a_n=2n-1$; в) $a_n=4n$; г) $a_n=\frac{1}{n}$; д) $a_n=(-1)^{n+1}$; е) $a_n=(-1)^n$. **411.** а) 75; б) 3. **412.** б) $12+2n$; $8+2n$; в) $14+2n$. **415.** а) 2; 5; 8; 11; 14. **416.** а) $a_n=2n+1$; 3; 5; 7; 9; 11; б) $a_n=-5\cdot 2^{n-1}$; –5; –10; –20; –40; –80. **419.** а) $a_1=5$; $a_{n+1}=a_n+5$. **420.** а) 58. **421.** а) 38. **422.** а) 5; б) 9. **423.** а) 15; б) 2,8. **424.** а) $0<a\leqslant 1$; б) $4<a\leqslant 9$; в) $100<a\leqslant 121$. **434.** а) $\left[\frac{n-1}{2}\right]+2$; б) $\left[\frac{n}{2}\right]+2$; в) $\left[\frac{n-1}{3}\right]$; г) $n-3\cdot\left[\frac{n}{3}\right]$. **438.** а) $b<0$; б) $b>0$.

§ 7

441. 3; 5; 7; 9; 11. **444.** а) 2; –1; –4; –7. **445.** $11\frac{1}{3}$. **446.** а) $a_2 = 1$; $d = 4$. **448.** а) $a_2 = 9$; $d = 4$; б) $a_1 = 1$; $d = 2$; в) $a_2 = 8$; $d = -1$; г) $a_{101} = 198{,}5$. **449.** а) 120; б) 24; в) 24; г) 80. **451.** а) Да; $n = 12$; б) нет. **457.** а) 600 000 р.; б) 800 000 р.; в) через 14 месяцев; г) 5%. **460.** а) 5050; б) 385; в) 3950. **461.** а) 210; б) 150. **463.** а) –60; б) 45. **465.** а) 1665; б) 1188; в) 432; г) 2484. **470.** $S_{2n-1} = a_n(2n-1)$. **471.** 4 002 000. **472.** n^2. **473.** $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$, ..., $\frac{23}{16}$, $\frac{25}{16}$.

§ 8

476. а) 2; б) да. **478.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **481.** а) 2; б) –54. **482.** а) 21; б) –6; в) 0,8 или –0,8. **487.** а) $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{64}{5}$ или $\frac{64}{5}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$; б) 9; 6; 4 или 4; 6; 9. **488.** а) 612 060 р.; б) 500 000 р. **490.** д) 102,5; е) $7 + 3\sqrt{2}$ или $7 - 3\sqrt{2}$. **495.** а) 252 или 28. **496.** 4. **497.** б) Например, 8, –4, 2, –1, ... **498.** а) 8; б) $2\frac{2}{3}$; в) $5\frac{5}{9}$; г) $4\frac{6}{11}$. **501.** а) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$. **502.** а) $(\sqrt{2}+1)$ м; б) $(2+\sqrt{3})$ м.

§ 9

529. а) $40° + 360° \cdot 1$; б) $220° + 360° \cdot (-2)$; в) $240° + 360° \cdot 1$; г) $180° + 360° \cdot (-3)$. **532.** а) 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. **533.** а) 360°; 180°; 90°; 270°; 0°; б) 45°; 135°; 225°; 315°. **534.** а) 6,28; б) 3,14; в) 1,57.

§ 10

545. а) 0; б) 1; в) 1; г) 0; д) 0; е) –1; ж) –1; з) 0; и) 0; к) 1; л) 1; м) 1. **548.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) –1; е) 0. **552.** а) 1; 0; б) –1; 0; в) 0; –1; г) 0; –1; д) 0; 1; е) 0; 1. **559.** а) $\sin 40° < \sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60°$. **562.** а) 5; б) $1{,}5\sqrt{2} + 4$. **569.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. **575.** а) 0; б) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; в) 0; г) 2. **587.** а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **589.** а) 1; б) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; в) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; г) 1. **594.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 1; ж) $\sqrt{3}$; з) не существует. **599.** а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$;

в) $\sin\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$. **601.** д) 1; е) $2\cos^2\alpha$; ж) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; з) $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **602.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$; в) $-\cos^2\beta$; г) $\sin^2\alpha$; д) $\frac{2}{\sin\alpha}$; е) $\frac{2}{\cos\beta}$. **604.** а) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$. **605.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **606.** а) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; ⟨) $\chi o\sigma\,\alpha - \sin\alpha$.

Дополнения к главе 4

608. а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **609.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **611.** а) $-\sin\alpha$; б) $\sqrt{3}\sin\alpha$. **618.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **619.** а) 0; б) 0. **620.** а) 1,5; б) 1,5. **621.** а) $-0{,}2$; б) $\frac{1}{3}$. **625.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **628.** а) $\cos\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\frac{\pi}{6}$; в) $\cos\frac{3\pi}{14}$; г) $\sin\frac{\pi}{26}$. **633.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **634.** а) $\sqrt{2}\sin\alpha$; б) $(\sin\alpha - \cos\alpha)\times$ $\times(\sqrt{3}-1)$. **635.** а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. **642.** а) $4\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 25^\circ$; б) $4\cos 2{,}5^\circ\cos 5^\circ\sin 12{,}5^\circ$. **643.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **647.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **656.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{5}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$. **658.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos 40^\circ$; г) $\cos 2\alpha$. **659.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 80^\circ$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\sin 70^\circ$. **661.** а) $\cos 2\alpha < 2\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$. **663.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **664.** а) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) 1; г) $-\sin\alpha - \cos\alpha$; д) $\frac{1}{\cos\alpha}$; е) $\cos 2\alpha$. **665.** а) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; б) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; в) $\sin 2\alpha$; г) $\sin 2\alpha$; д) 1; е) 1. **675.** а) 1; б) 1; в) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; г) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. **676.** ж) -1; з) 0. **677.** а) $2\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\cos\alpha$. **680.** а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{1}{8}$. **684.** а) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$.

§ 11

690. а) 0,3; б) 0,001; в) 0,03; г) 2. **691.** а) $\frac{1}{35}$; б) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{3}{350}$; г) $\frac{1}{700}$. **695.** 3,14. **698.** а) 3 и $\frac{3}{127}$; б) 3 и $\frac{3}{17}$; в) 0,2 и $\frac{1}{6}$; г) 0,02 и $\frac{1}{6}$; д) 0,005 и $\frac{1}{37}$;

е) 0,00016 и $\frac{1}{6274}$. **699.** а) $0,48 \approx 0,5$; $|0,48 - 0,5| = 0,02$; $\frac{0,02}{0,48} = \frac{1}{24}$; г) $-0,51 \approx -0,5$; $|-0,51 - (-0,5)| = 0,01$; $\frac{0,01}{|-0,51|} = \frac{1}{51}$. **700.** а) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{20}$; в) $\frac{1}{2} \cdot 10^{0} = \frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2} \cdot 10^{0} = \frac{1}{2}$. **701.** $71\,523 \approx 71\,500$ с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$. **703.** а) $a \approx 2,380 \cdot 10^7$, $b \approx 10,00$, $c \approx 2,380 \cdot 10^{-3}$; б) $a \approx 2,381 \cdot 10^7$, $b \approx 10,01$, $c \approx 2,381 \cdot 10^{-3}$. **705.** а) 0,505; б) 2; в) $1,5 \cdot 10^{-3}$. **706.** а) $a + b \approx 19,35$ с точностью до 0,0055; $a - b \approx 5,37$ с точностью до 0,0055. **709.** С точностью до 0,002. **710.** Если округлить четыре данных числа с точностью до 0,01, то число 10,66 будет приближением суммы этих четырёх чисел с точностью до 0,1. **713.** а) 0,3428. **714.** а) 86,66; б) 0,2195; в) 2,449; г) 5,916. **716.** а) 0,05684. **717.** а) 6,411; б) 1001; в) 1,225; г) 0,8450.

§ 12

725. Белый. **726.** 3,5; среднее арифметическое и медиана, они равны 3,5. **727.** а) Среднее арифметическое 29, мода 30, медиана 29, размах 13. **728.** а) Среднее арифметическое 29,61, мода 29,6, медиана 29,6, размах 0,8; б) среднее арифметическое 43,77, мода 43,8, медиана 43,8, размах 0,5. **740.** а) 21 отрезок; б) 21 рукопожатие. **741.** 28 партий. **742.** а) 8 друзей; б) 9 друзей.

Задания для повторения

809. а) 8,5; б) $9\frac{1}{3}$; в) 156; г) $\frac{17}{36}$. **810.** а) 3; б) $\frac{2}{7}$. **811.** а) $\frac{11}{350}$; б) $\frac{2009}{2010}$; в) $\frac{1}{2010}$. **812.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **814.** а) $\frac{2}{11}$; б) 0,2; в) 20; г) 5,5; д) 0,05. **815.** а) 0,6; б) 25. **816.** а) -1005; б) -1006. **817.** а) $1\frac{501}{1001}$; б) $4\frac{519}{1003}$. **833.** 4. **844.** 3. **848.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **849.** а) $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$; б) $\frac{(2n+1)(2n-1)n}{3}$. **865.** а) 0; б) -2. **867.** а) 1; б) -3; в) 1; г) 3. **868.** а) $2\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{10}$; в) $2\sqrt{7}$; г) $\sqrt{34}$. **872.** а) 5; б) $\frac{25}{16}$. **881.** а) $\pi < \sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{7} + \sqrt{3} > \sqrt{8} + \sqrt{2}$. **888.** а) $6 + 18\sqrt{3}$; б) $20\sqrt{2} - 40\sqrt{5}$. **891.** б) $3 + \sqrt{2}$. **903.** а) $x(x - 17)$; б) $x(5x + 23)$; в) $(x - 2)(x + 2)$. **904.** д) $(x^2 + x + 1)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; е) $(x^2 - x + 3)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$. **905.** а) $\frac{1}{4}(a^2 + 2x - b^2)(a^2 + 2x + b^2)$.

906. а) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$. **910.** а) $3(a-b)(b-c)(c-a)$; в) $(x^2-\sqrt{3}x+1)\times$ $\times(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$. **914.** а) 2; б) $4m^2$. **915.** а) $\frac{x^4-y^4}{x^2y^2}$; б) $2(x^2+y^2)$. **916.** а) 0; б) $\frac{x}{x-y}$. **917.** а) $\frac{1-k}{1+k}$; б) $\frac{m+n}{m-n}$. **918.** а) 3; б) –2. **919.** а) $\frac{1}{y-x}$; б) $\frac{1}{a+2}$. **921.** а) $-\frac{1}{x+4}$; б) $\frac{3}{x+5}$. **923.** а) 2,5; б) $1\frac{7}{8}$. **924.** а) 2; б) $14\frac{2}{7}$. **931.** а) $|a|$; б) $\sqrt{|a|}$; в) $|a|$; г) $|a|^3$. **935.** а) $2\sqrt[3]{2}$; б) $-4\sqrt[3]{3}$. **936.** а) $\sqrt{x}+x\sqrt{x}$; б) $a+4\sqrt[3]{a}$. **937.** а) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **940.** а) $\frac{4a}{b}$; б) $-a$. **945.** а) $2\sqrt{x}+1$; б) –1; в) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; г) $\frac{3\sqrt{m}+28}{m-49}$. **949.** а) 1; б) 0; в) x; г) 0. **955.** а) $t\in(-\infty; 9)$; б) $t\in(-\infty; -3)\cup(-3; 0{,}2)$. **964.** $m\in\left(\frac{6-4\sqrt{3}}{3}; 2\right)\cup\left(2; \frac{6+4\sqrt{3}}{3}\right)$. **980.** а) 1; –2; б) нет корней. **981.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **982.** а) –4; б) –3; в) 6; г) –4. **983.** а) –2,5; б) –1,5. **985.** а) 2; 4; б) 1. **987.** а) –3; 0; б) –3; –2; в) 0,5; г) 0,2. **988.** а) 7; б) –12; –10. **989.** а) 0; $-5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; б) 2,5; 5. **992.** а) –1; б) 16; в) 7; г) $\frac{1}{2}$. **993.** а) 1; б) 1. **994.** а) Такого числа нет; б) –9; в) 1,5; г) –8. **996.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 2; д) 36; е) 49. **997.** а) $\left(\frac{13}{8}; \frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{51}{7}; -\frac{48}{7}\right)$; в) (–2; 4); г) (1,5; 2,5). **998.** а) (2; 0); (–1; 3); б) $\left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$; $\left(\frac{9+\sqrt{33}}{2}; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)$. **999.** а) (1; 2); (2; 1); б) (1; 1). **1000.** а) $\left(-22; -\frac{11}{3}\right)$; б) (–8; –7). **1001.** а) (2; 3); (3; 2); (1; 5); (5; 1); б) (0; 2); (2; 0). **1002.** а) (5; 1); (1; 5); б) (2; 2); (–2; –2); $(0; 2\sqrt{2})$; $(0; -2\sqrt{2})$; $(2\sqrt{2}; 0)$; $(-2\sqrt{2}; 0)$. **1008.** а) (0; –1); б) нет решений. **1026.** в) $[1; +\infty)$; г) $\left[\frac{5}{7}; +\infty\right)$. **1027.** б) $(-\infty; -6)\cup\left(-6; \frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 0)\cup\left(0; \frac{4}{3}\right]$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; 5\right]$. **1032.** а) 2; б) 2; в) нет корней; г) 1. **1038.** 1. **1052.** а) Указание. Используйте неравенство Коши для положительных чисел x, y, z: $\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$. **1067.** а) $v_1=\frac{a+b}{2}$ км/ч; б) $v_2=\frac{2ab}{a+b}$ км/ч. **1068.** В безветренную погоду. **1072.** 5 м, 6 м, 9 м; 6 м, 6 м, 8 м; 6 м, 7 м, 7 м. **1080.** а) –1; б) 2. **1081.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$. **1082.** а) Нет решений, если $a = 0$; $x \in (0; +\infty)$, если $a > 0$; $x \in (-\infty; 0)$, если $a < 0$. **1088.** а) Ни при каких; б) при $b \in [-4; 4]$. **1089.** а) При $m \geqslant 4$; б) при $m \geqslant 1$; в) при $m \in [-4; 4]$; г) при $m \in [-6; 6]$. **1090.** а) $\left[-4; -\frac{6}{7}\right]$; б) $\left(-\infty; \frac{4}{13}\right] \cup [2; +\infty)$; в) $\{2\} \cup [3; +\infty)$; г) $\{-1\} \cup [5; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **1091.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$. **1092.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(2; +\infty)$; в) $\left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right)$; д) $[-2; 1) \cup [2; +\infty)$; е) $(-\infty; -3] \cup (-2; 3]$. **1093.** а) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{7}{6}\right)$. **1094.** а) $(-5; -1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-1; 3)$; в) $(-6; -1{,}5) \cup (1; 6)$; г) $(-\infty; 1)$. **1098.** а) –4; б) –80; в) –22; г) –88. **1099.** 16 ран. **1100.** а) Через 9 дней; б) через 5 дней; в) через 7 дней; г) через 7 дней. **1106.** 170,5. **1109.** $n = 8$, $a_1 = 14$, $a_8 = -7$. **1117.** 1620. **1123.** 196 820. **1124.** 7168. **1126.** 320. **1127.** $1023\frac{3}{4}$; $614\frac{1}{4}$. **1128.** 5. **1129.** 7. **1130.** 1535,25; –512,25. **1131.** $1093\frac{13}{27}$. **1132.** –3; 3. **1134.** 0,125. **1135.** 475,6419; 237,6099. **1137.** а) $a_n = 15 - 10n$; б) $a_n = 3n - 6$; в) $a_n = 3n + 3$; г) $a_n = -n$. **1139.** а) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$; б) $b_1 = 1$, $q = 3$. **1140.** 12; 16; 20; 25 и 24,75; 20,25; 15,75; 12,25. **1141.** 8; 10; 12 или 17; 10; 3. **1142.** 10. **1143.** 55. **1146.** а) 3; б) 2. **1147.** –120°. **1148.** а) –30°; б) –90°; в) –270°; г) –360°; д) –1200°; е) –4320°. **1149.** а) –60°; б) 432°. **1150.** 630°. **1151.** а) –1350°; б) 2700°. **1161.** а) 7; б) –13. **1167.** а) 1; б) 1. **1175.** а) 1 человек; б) 11 человек. **1176.** 4 учащихся. **1177.** Нет. **1178.** 435 игр. **1184.** Поровну. **1185.** 5 ч. **1187.** 7 человек, 53 денежные единицы. **1188.** 17 человек, 42 пенязя. **1189.** 9 человек, 70 денежных единиц. **1190.** 126 семей, 3750 денежных единиц. **1191.** 40 мужчин и 80 женщин. **1192.** 23 ответа. **1193.** 252; 2,52; 0,252. **1194.** 3512; 351,2; 35,12. **1195.** $22\frac{2}{9}$ градуса. **1196.** а) 60 м; б) 3 м. **1197.** а) На 6 м; б) на 5 лет. **1198.** $\frac{7}{9}$. **1199.** Мотоциклист; а) в 1,25 раза; б) в 2,6 раза. **1200.** 89 г меди и 35 г цинка. **1201.** а) 5 фигур; б) в 4 раза; в) 4 квадрата. **1202.** 5 ч. **1203.** $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ ч. **1205.** 8,685 кг золота и 4,725 кг серебра. **1206.** 10 и 15 м/с. **1207.** 40 и 25 м.

1208. 24 рабочих, 14 дней. **1209.** 4, 7, 9, 11. **1210.** 36, 41, 53 и 58 см. **1211.** Вторая, в 1,5 раза. **1212.** 188 и 130 абитуриентов. **1213.** В 1,5 раза. **1214.** 41 типа A и 56 типа B. **1217.** 5 и 20. **1218.** 12. **1219.** $5\frac{2}{3}$ локтя. **1220.** 72 пчелы. **1221.** 8 участников. **1222.** Девочки; на 8 очков. **1223.** 9 участников. **1224.** 11 участников. **1225.** 50 км/ч. **1226.** 46 км/ч. **1227.** 4 км/ч. **1228.** 25 грузовиков. **1229.** 24 и 40 Ом. **1230.** 15 дм^2. **1231.** 50 км/ч. **1232.** а) $s = 800t - \frac{gt^2}{2}$; б) $s = -800t + \frac{gt^2}{2}$. **1233.** Примерно 125 м. **1234.** 45 с. **1235.** а) 0,5 м/с; б) 10,5 м/с; в) 20,5 м/с; г) 30,5 м/с. **1237.** 4 с (2 с вверх и 2 с вниз); 20 м. **1238.** а) Через 3 с; б) через 5 с. **1239.** 40,6 м. **1240.** 20,4 и 159,6 с. **1241.** 6 радиоприёмников. **1242.** 40 дней; 125%. **1243.** 10 га; 12 дней. **1244.** 14 км/ч. **1245.** а) $t = \frac{2yl}{y^2 - x^2}$; $l = \frac{t(y^2 - x^2)}{2y}$; $x = \sqrt{y^2 - \frac{2yl}{t}}$; $y = \frac{l + \sqrt{l^2 + t^2x^2}}{t}$; б) 20 мин. **1246.** а) 900 м; б) 800 м. **1247.** а) 600 м; б) 400 м. **1248.** 45 и 30 дней или 24 и 72 дня. **1249.** 16 ч и 5 ч 20 мин. **1250.** 10 и 6 км/ч. **1251.** 18 и 4 км/ч. **1252.** 24 м^3. **1253.** 12%. **1254.** 4 км/ч. **1255.** 50 км/ч. **1256.** За 1 ч 15 мин. **1257.** а) За 15 дней; б) 10 коров; в) 40 коров. **1258.** 36 быков.

Задания для самоконтроля

1. 1) $-\frac{1}{9}$; 2) $\frac{x^2 + 2x}{x - 2}$; 4) 7 и –5. **2.** 1) 5,75; 2) $\frac{2x(x+3)}{3(x-3)}$; 4) –5 и –4; 4 и 5. **3.** 1) –0,25; 2) $\frac{1-x}{1+x}$; 4) 8 и 0,5 дм. **4.** 1) 10; 2) $\frac{3-a}{3+a}$; 4) 3,5 и 0,5 м. **5.** 1) 1; 2) $\frac{3m^2 + 16}{m + 4}$; 3) (1,5; 3,5); 4) (1; –1); (4; 2). **6.** 1) 16; 2) $\frac{4x^2 + 2}{x + 1}$; 3) (2; –2); 4) (2; 2); (6; –2). **7.** 1) –0,5; 2) $\frac{x+y}{x-y}$; 3) (–1; 2); 4) за 20 дней. **8.** 1) $7\frac{9}{11}$; 2) $\frac{2(a+1)}{a-1}$; 3) (2; –3); 4) 1,3 ч. **9.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-5\frac{3}{4}$; 3; 4) 5; –1. **10.** 2) 12; 3) $\frac{12}{a}$; 4) 0; 5. **11.** 1) 70 и 80 км/ч; 2) –2; $1\frac{1}{3}$; 3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **12.** 1) $-\frac{32}{13}$; 2; 2) (–7; 8); 3) 121; 4) первое число больше второго. **13.** 1) $-2\frac{247}{400}$; 2) $\frac{1}{2x-2}$; 4) 5 и 6. **14.** 1) $-8\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a}{a^2 - 4}$; 4) 7 и –1. **15.** 1) 30; 2) $\frac{1}{4}$; 4) 7 и 0,5; –0,5 и –7. **16.** 1) 0,46; 2) 1; 4) 1,5 и –8,2; 8,2 и –1,5. **17.** 1) 0; 3) 177; 4) (–4; 2); (4; –2). **18.** 1) –3; 4; 2) $d = -\frac{3}{19}$; 3) $(-\infty; -1) \cup$

$\cup (-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 100)$. **19.** 1) $a_{10} = 7{,}6$; 2) $x + \sqrt{x}$; 3) 2; 5; 4) $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$. **20.** 1) $d = 2{,}5$; 29 является членом данной арифметической прогрессии; 2) $1 + c$; 3) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; 13\frac{2}{3}\right]$. **21.** 1) $a_1 = 2$, $d = 1{,}2$; 2) -5; -1; 3; 3) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 4) -2. **22.** 1) 48 и 60 км/ч; 2) $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$; 3) $(-2; -1{,}5)$; 4) $-m$. **23.** 1) $a_{11} = 50$, $S_{11} = 330$; 2) $(-7; 7)$; 3) $(1; -1)$; 4) -3; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3. **24.** 1) $S_6 = 7\frac{7}{8}$; 2) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $(1; 0)$; 4) $(0{,}7)^{-5} > (0{,}7)^0$. **25.** 1) $S_7 = 381$; 2) -1; 4; 3) нет решений; 4) -32. **26.** 1) За 10 и 15 ч; 2) $3-\sqrt{21}$; $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$; $3+\sqrt{21}$; 3) $(1; 5)$; 4) $8^{1,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. **27.** 1) 24; 2) -2; 3; 3) $(-\infty; -7) \cup (0; 5)$; 4) 4. **28.** 1) $-\frac{1}{4}$; 7; 2) $\left(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}\right)$; 3) -1; 1; 4) числа равны. **29.** 1) 50 км/ч; 2) -3; -1; 1; 3; 3) $(-60; +\infty)$; 4) $[2; 10]$. **30.** 1) -3; -2; 2; 3; 2) $(-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$; 3) 1; 4) -2; 3. **31.** 1) $14\sqrt{2}$; 2) $(0; 0)$ — точка пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ с осями координат; 3) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$; 4) $(2; 3)$. **32.** 1) $-10 - 16\sqrt{5}$; 2) -3; $\frac{2}{3}$; 3) 15 палаток и 10 домиков; 4) 2 решения. **33.** 1) 1; 2) -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 3) в первом зале 20 мест в ряду, во втором — 30; 4) $(1; -3)$, $(-3; 1)$. **34.** 1) $-0{,}16$; 2) $\frac{14}{25}$; 3) $-1{,}7$; 4) $(0{,}6; -0{,}2)$, $\left(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15}\right)$. **35.** 1) -2; 2) 15 и 20 мин; 3) $-2{,}9$; 4) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $(-2; -3)$. **36.** 1) -4; 0,4; 2) $-\frac{0{,}88}{x-0{,}3} - 0{,}6$ при условии $x \neq 1$; выражение принимает все значения из множества $\left(-\infty; -\frac{13}{7}\right) \cup \left(-\frac{13}{7}; -0{,}6\right) \cup (-0{,}6; +\infty)$; 3) 16 и -16; 4) -2; 0. **37.** 1) 2; 2) 5; 3) -4; при $x = -\frac{7}{3}$; $y = \frac{4}{3}$; 4) на 35%.

Задания из тренировочных вариантов ГИА

1. 2), 4). **2.** 1). **3.** 1). **4.** 150°. **5.** 0,15. **6.** 3). **7.** А2, Б1, В3. **8.** 3). **9.** -6. **10.** $\frac{2}{3}$. **11.** $(-\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. **12.** 1). **13.** 10. **14.** $x \in (-5; -3)$. **15.** 25. **16.** 8. **17.** -1.

Задания на исследование

1. а) Единственный корень при $a = -0{,}1;\ 0;\ 0{,}5$; два различных корня при $a \in (-\infty;\ -0{,}1) \cup (0{,}5;\ +\infty)$; не имеет корней при $a \in (-0{,}1;\ 0) \cup (0;\ 0{,}5)$; б) единственный корень при $a = 0$; два различных корня при $a \neq 0$; нет значений a, при которых уравнение не имеет корней. **2.** $\frac{1}{2}$; при $a = -1$. **3.** При $a \leqslant -\frac{1}{4}$. **4.** а) При $a \in (-\infty;\ 2) \cup \left(2;\ 3\frac{1}{8}\right)$. **5.** а) При $a \in \left[-\frac{25}{16};\ +\infty\right)$. **6.** а) 172,25%; б) 185,61%. **7.** Для $p = 150$, $x = 116$, $y = 102$. **8.** Наименьшее время буксировки плотов 6 ч. **9.** а) $b \in [6;\ 12]$; б) $a \in [3;\ 4]$. **10.** а) $t \in [4;\ 6]$; б) $t \in [12;\ 15]$. **11.** 5. **12.** 12. **13.** 4. **19.** 12 лет. **20.** 13 лет.

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *С. А. Крутикова*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *А. К. Райхчин, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 29.07.13. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,56 + 0,60 форз. Тираж 12 000 экз. Заказ № 36320 ПТ (П–Гз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу ОАО «ПолиграфТрейд»
в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru